

## OSCILADOR ARMONICO

Anteriormente estudiamos la cinemática del movimiento armónico simple en una dimensión. Se trata de un movimiento periódico en torno de un punto determinado, el que se elige como origen de un eje de abscisas. Los máximos desplazamientos en uno y otro sentido respecto del origen, de igual magnitud, corresponden a la llamada "amplitud del movimiento". El tiempo que tarda el punto móvil en ejecutar una oscilación completa es el período  $T$  del movimiento y el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo es la "frecuencia"  $f$ .

En su oportunidad describimos este movimiento expresando la posición  $x(t)$  en función del tiempo en términos de una función periódica, por ejemplo:

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (1)$$

donde el coeficiente  $\omega$  en el argumento de la función coseno tiene dimensiones de recíproco de un tiempo y recibe el nombre de "frecuencia angular". ; No confundir con el concepto de velocidad angular, la que se acostumbra también a denominarla como  $\omega$ , pero que corresponde a un concepto diferente.

El argumento  $\omega t$  es entonces adimensional y representa el valor de un ángulo, expresado en radianes.

De la trigonometría sabemos que  $-1 \leq \cos \omega t \leq 1$ , de modo que el movimiento queda acotado:

$$-A \leq x \leq A \quad (2)$$

siendo  $A$  la amplitud.

En algún momento se demostró también que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3)$$

independientes de la amplitud del movimiento.

Ahora bien, de (1) se observa que para  $t=0$  (inicio del movimiento), el punto móvil se encontraba en  $x=A$ , es decir, en el extremo derecho. Si quisiéramos describir un movimiento armónico de igual amplitud y período, pero en el que el punto móvil iniciara su movimiento desde el origen, entonces lo escribiríamos como

$$x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

lo que da para  $t=0$ ,  $x = A \cos \frac{\pi}{2}$ , o sea,  $x(0)=0$ .

La trigonometría nos muestra también que (4) puede escribirse equivalentemente como:

$$x = A \sin \omega t \quad (5)$$

Como conclusión se tiene que para representar un movimiento armónico simple de amplitud  $A$  y período  $T$ , la forma de la función trigonométrica depende de las condiciones iniciales, en las que deberíamos incluir también si el punto parte con o sin velocidad inicial. Es por este motivo que para abrirse a todas las posibilidades se acostumbra a adoptar como forma más general de representación de un movimiento armónico simple la forma.

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (6)$$

donde los valores  $A_1$  y  $A_2$  deberán ser determinados a partir de condiciones iniciales dadas (posición y velocidad), y donde ninguno de ellos representa en sí mismo la amplitud del movimiento; en el caso en que ambos resulten no nulos.

A menudo se prefiere transformar la ecuación (6) redefiniendo las constantes  $A_1$  y  $A_2$ , por ejemplo como:

$$A_1 = A \cos \delta \quad (7)$$

$$\text{y } A_2 = A \sin \delta \quad (8)$$

en términos de las nuevas constantes  $A$  y  $\delta$ .

Sin importar que valores correspondan a  $A_1$  y  $A_2$ , positivos o negativos, siempre existirá un valor  $\delta$  tal que se cumplan (7) y (8). Esto queda demostrado dividiendo las ecuaciones (8) ÷ (7), miembro a miembro, obteniéndose en este caso:

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{A_2}{A_1} \quad (9)$$

Puesto que una tangente puede tomar cualquier valor, entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , siempre habrá un valor  $\delta$  para el cociente  $-\frac{A_2}{A_1}$ .

Reemplazando entonces los valores de  $A_1$  y  $A_2$  en (6) se obtiene:

$$X(t) = A \cos \omega t \cos \delta - A \sin \omega t \sin \delta$$

o sea,

$$\boxed{X(t) = A \cos(\omega t + \delta)} \quad (10)$$

La constante  $\delta$  recibe el nombre de "ángulo de fase".

La ecuación (10) es enteramente equivalente a la ecuación (6) y donde las constantes por determinar son ahora  $A$  y  $\delta$ . Además presenta la ventaja de mostrar directamente el valor de la amplitud, en este caso  $A$ .

¿Qué relación hay entre  $A$ ,  $A_1$  y  $A_2$ ?

Si elevamos al cuadrado las ecuaciones (7) y (8) y luego las sumamos miembro a miembro obtenemos:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (11)$$

Este resultado muestra que si se da un movimiento armónico simple en la forma (6), su amplitud deberá determinarse según lo establece la ecuación (11).

### Dinámica del M.A.S.

De lo dicho anteriormente elegiremos para lo que sigue un movimiento armónico simple representado por:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (12)$$

La velocidad se obtiene de inmediato derivando (12) respecto del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (13)$$

y la aceleración:

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (14)$$

Si se desea encontrar una expresión de la velocidad en función de la posición, multiplicamos por  $\omega$  la ecuación (12), elevándola luego al cuadrado y la sumamos luego miembro a miembro con la ecuación (13) previamente elevada al cuadrado:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 x^2 &= \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) \\ v^2 &= \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\therefore \boxed{v(x) = \omega \sqrt{A^2 - x^2}} \quad (15)$$

Para la aceleración en función de la posición, basta reemplazar (12) en (14):

$$\boxed{a(x) = -\omega^2 x} \quad (16)$$

Inevitablemente en algún momento llegaremos a formularnos la pregunta acerca de si existirá una fuerza que aplicada a una partícula de masa  $m$  la haga ejecutar un movimiento armónico simple. Nos enfrentamos así a un problema común en dinámica, esto es, dado el movimiento, determinar la fuerza que lo produce.

La ecuación de movimiento (segunda ley de Newton), en una dimensión,  $F = ma$  junto con la ecuación (16) nos da la respuesta:

$$F(x) = -m\omega^2 x \quad (17)$$

La ecuación (17) muestra que la fuerza necesaria debe ser del tipo

$$F = -kx \quad (18)$$

es decir, proporcional al desplazamiento y de signo contrario a éste.

Fuerzas de estas características suelen encontrarse en diversos fenómenos periódicos. En esos casos la frecuencia angular del movimiento que producen puede calcularse de inmediato ya que de las ecuaciones (17) y (18) se tiene que

$$m\omega^2 = k$$

y por lo tanto,

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (19)$$

y con esto, el período es  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

El desplazamiento será del tipo:  $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$  (21)

A la inversa, en forma independiente de todo lo expuesto anteriormente <sup>si</sup> se planteara determinar el movimiento que adquiere una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza del tipo

$F = -kx$ , deberíamos plantear la ecuación de movimiento:

$$-kx = m\ddot{x} \quad \text{donde} \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \equiv a \quad (\text{aceleración})$$

es decir,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (22)$$

La integración de esta ecuación, cuya discusión no se contempla en un curso del nivel de F10A, nos conduciría a una forma posible de solución general del tipo:

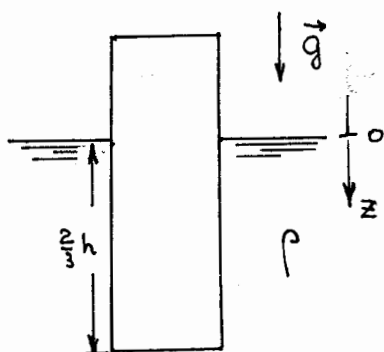
$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

coincidente con (21).

### Osciladores armónicos.

Examinemos algunos ejemplos de sistemas que apartados de sus posiciones de equilibrio y luego dejados en libertad, ejecutan movimientos armónicos simples.

1. Un cilindro circular de masa  $m$ , radio  $r$  y altura  $h$  flota verticalmente en un líquido de densidad  $\rho$  con  $\frac{2}{3}$  de su altura sumergidos. Suponiendo que la superficie libre del líquido es lo suficientemente extensa como para que su nivel se mantenga apreciablemente constante al subir y bajar el cilindro, calcular el período de oscilación y la amplitud del movimiento que adquiere si se le sumerge hasta que la cara superior quede emparejada con la superficie libre del líquido y luego se le deja libre.



$$E = V \rho g \text{ (empuje)} ; W = mg \text{ (peso)}$$

$V$  = volumen de líquido desplazado por el cilindro

$\rho$  = densidad del líquido;  $g$  = aceleración de gravedad

$$\text{En el estado de equilibrio: } E = W$$

$$\text{o sea, } \frac{2}{3} h \cdot A \cdot \rho \cdot g = mg \quad (1)$$

$$\text{con } A = \pi r^2 \text{ (área basal del cilindro)}$$

Con el sentido del eje  $z$  positivo hacia abajo al hundirlo en  $z$ :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= mg - \left(\frac{2}{3}h + z\right) A \rho g \\ &= \frac{2}{3}h A \rho g - \frac{2}{3}h A \rho g - A \rho g z\end{aligned}$$

$$\therefore F = -(\pi R^2 \rho g) \cdot z \quad (2)$$

Se observa que la fuerza es proporcional  $z$  y con signo contrario.

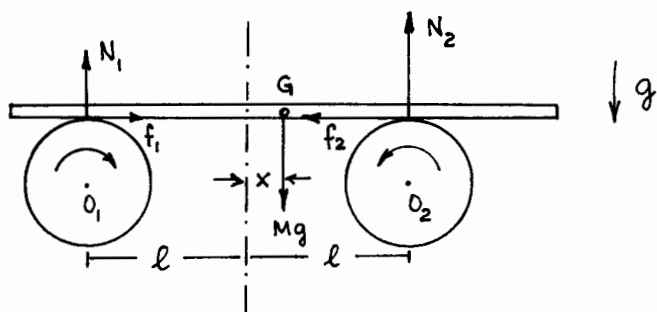
$$\therefore m \omega^2 = \pi R^2 \rho g \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\pi R^2 \rho g}{m} \quad \text{frecuencia angular del movimiento.}$$

$$\text{Luego, } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\pi R^2 \rho g}} \quad ; \quad \text{Amplitud} = \frac{1}{3}h$$

$$\text{Además: } z(t) = \frac{1}{3}h \cos \sqrt{\frac{\pi R^2 \rho g}{m}} t$$

El cilindro oscila verticalmente con M.A.S.

2. Un tablón homogéneo horizontal descansa centrado sobre dos cilindros de radios iguales que giran en sentidos.



Contrarios. Los coeficientes de roce cinético en ambos contactos son iguales, de valor  $\mu$  y los ejes de los cilindros están separados por una distancia  $2l$ .

Si inicialmente el tablón es desplazado en  $x_0$  respecto de la posición centrada y luego dejado libre sin velocidad inicial,

- Determinar el movimiento  $x(t)$
- Calcular el período del movimiento.



La figura muestra al tablón en un instante  $t > 0$ , en el que el centro de gravedad  $G$  se encuentra desplazado en  $x$ . Las reacciones normales en los contactos son  $N_1$  y  $N_2$  y las fuerzas de roce cinéticas (hay resbalamiento), son  $f_1$  y  $f_2$ .

Se tiene entonces que  $f_1 = \mu N_1$  y  $f_2 = \mu N_2$

Llamando  $M$  a la masa del tablón (no aparece en el enunciado),

$$\therefore N_1 + N_2 - Mg = 0 \quad (\text{no hay movimiento vertical})$$

Además, las reacciones en los apoyos son inversamente proporcionales a sus distancias al centro de gravedad  $G$ :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{l-x}{l+x} \rightarrow \frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{l-x}{l-x+l+x} \quad \text{y como } N_1+N_2 = Mg.$$

$$\therefore N_1 = \frac{Mg}{2l}(l-x) \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{Mg}{2l}(l+x)$$

De este modo, se obtiene que  $f_1 = \frac{\mu Mg}{2l}(l-x)$  y  $f_2 = \frac{\mu Mg}{2l}(l+x)$

$$\text{y su resultante } F = f_1 - f_2 = -\frac{\mu Mg}{l}x$$

Se trata de una fuerza proporcional al desplazamiento con signo contrario, donde la constante  $k = \frac{\mu Mg}{l}$

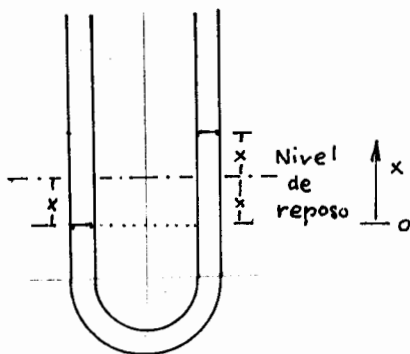
$$\text{Luego, } \frac{\mu Mg}{l} = M\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{\mu g}{l}$$

Estamos entonces ante un M.A.S. y luego,

$$\text{a) } \boxed{x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t}$$

$$\text{b) } \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\mu g}}}$$

3. Un tubo en U contiene un líquido de densidad  $\rho$  y tiene ambos extremos abiertos. La ley de vasos comunicantes indica que en estas circunstancias el nivel del líquido en ambas ramas es el mismo.



Al provocar un desnivel  $x$  en el lado izquierdo, el peso de la columna de altura  $2x$  al lado derecho equivale a una fuerza no balanceada.

Llamando  $l$  a la longitud total de líquido y  $A$  a la sección transversal uniforme del tubo, la masa de líquido es

$$m = \rho A l$$

La fuerza restauradora es proporcional a  $x$  e igual al peso de la columna de altura  $2x$ , cuya masa  $m' = \rho A \cdot 2x$ :

$$F = -\rho A 2x \cdot g = -(2\rho A g) x \quad \therefore \text{Se trata de un M.A.S.}$$

La constante de proporcionalidad es entonces  $k = 2\rho A g$ , de modo que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2\rho A g}{\rho A l} = \frac{2g}{l}.$$

El período de oscilación correspondiente es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}}$$

Lo mismo puede demostrarse formando la ecuación diferencial

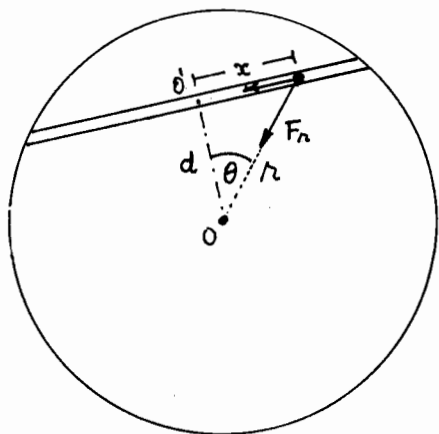
$$-(2\rho A g) x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\rho A g}{\rho A l} x = 0$$

que es la ecuación diferencial de un M.A.S. y por lo tanto  $\omega^2 = \frac{2g}{l}$

Si el desnivel inicial fuera  $x_0$ , dejando luego libre al líquido, la oscilación tendría por ecuación

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t$$

4. En una perforación practicada en la tierra, a una distancia  $d$  de su centro  $O$ , se introduce una masa  $m$ . Suponiendo una densidad  $\rho$  uniforme y prescindiendo de toda fricción dentro de la perforación, determinar el movimiento de la partícula y el período  $T$  correspondiente.



$M$ : masa de la tierra ;  $R$ : radio correspondiente.

Nota: Cuando la partícula  $m$  se encuentra a la distancia  $r$  del centro de la tierra (ver figura), la masa efectiva  $M'$  que atrae a  $m$  es la que corresponde a una esfera de radio  $r$  y no a la esfera total de radio  $R$ .

Adoptemos el eje de la perforación como eje  $x$ , con origen  $O'$  en su punto medio. Sea  $x$  la distancia de  $m$  a  $O'$  en  $t > 0$ .

$$\therefore F_x = F_n \sin \theta \quad (1) \quad ; \quad r = \frac{d}{\cos \theta} \quad (2)$$

La fuerza  $F_n$  corresponde a la atracción gravitacional de la masa de la esfera de radio  $r$ .

$$M' = \frac{r^3}{R^3} M \quad (3) \quad ; \quad \therefore F_n = -\frac{GM'm}{r^2} = \frac{Gr^3}{R^2 r^2} Mm = -\frac{GMm}{R^3} r \quad (4)$$

$$\text{De (2) y (3):} \quad F_n = -\frac{GMm d}{R^3 \cos \theta} \quad (5)$$

$$\text{De (1) y (5):} \quad F_x = -\frac{GMm}{R^3} \cdot d \cdot \tan \theta$$

Como  $\tan \theta \cdot d = x$ , luego,

$$F_x = -\frac{GMm}{R^3} x \quad (6)$$

La ecuación diferencial del movimiento de  $m$  es entonces

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{GM}{R^3} x = 0 \quad (7)$$

De (6) y por supuesto también de (7) se desprende que se trata de un movimiento armónico simple (M.A.S), de frecuencia angular

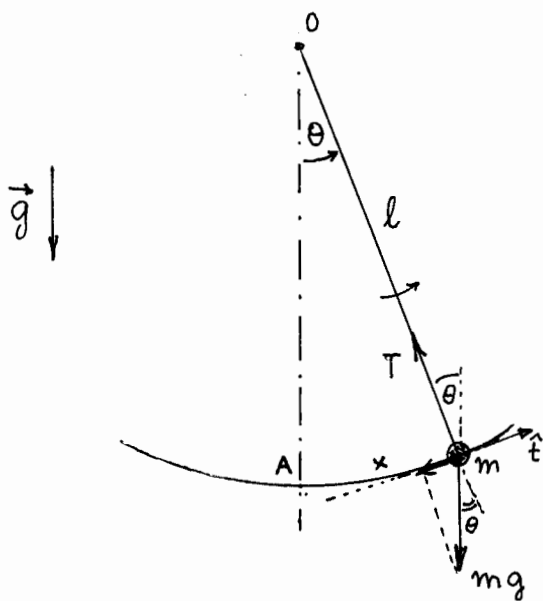
$$\boxed{\omega = \frac{GM}{R^3}} \quad (8)$$

Período  $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{GM}}}$  (9)

Amplitud  $\boxed{A = \sqrt{R^2 - d^2}}$  (10)

También:  $\boxed{x(t) = \sqrt{R^2 - d^2} \cos \frac{GM}{R^3} t}$  (11)

5. Péndulo matemático. Se compone de una masa  $m$  ligada a un punto fijo  $O$  mediante un hilo ideal de longitud  $l$ . Al apartarlo de su posición de equilibrio en el punto más bajo  $A$  y luego dejarlo libre, oscila a ambos lados de  $OA$ .



En el instante de la figura,  $m$  se mueve en dirección  $\hat{t}$ . La ecuación tangencial, en consecuencia, es:

En el instante de la figura,  $m$  se mueve en dirección  $\hat{t}$ . La ecuación tangencial, en consecuencia, es:

$$-mg \sin \theta = m l \ddot{\theta}$$

$$\text{de modo que } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

resulta ser la ecuación diferencial del movimiento. No se trata por lo tanto de un M.A.S. Sin embargo,

En el caso de pequeñas oscilaciones, de la expresión del

$$\text{desarrollo en serie de la función } \sin \theta : \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Se desprende que el seno del ángulo puede aproximarse al valor del ángulo mismo, expresado en radianes. Por lo tanto, la ecuación diferencial se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

que corresponde a un M.A.S. con  $\omega^2 = \frac{g}{l}$

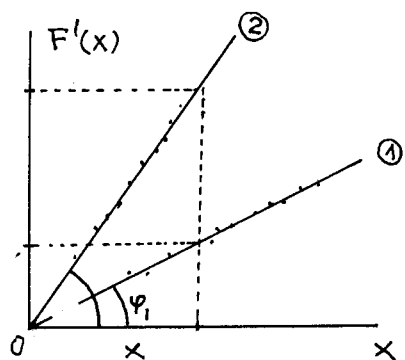
$$\therefore T = 2\pi \sqrt{l/g} \quad \rightarrow \text{su período de oscilación}$$

$$\text{De } x = l\theta \rightarrow \ddot{x} = l\ddot{\theta} \quad \text{y luego, } \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{l} \quad \text{y } \theta = \frac{x}{l}$$

$$\text{de donde obtenemos } \ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$$

6. Sistema masa-resorte. La fuerza restauradora de un resorte tiene la característica de ser proporcional a la deformación, dentro de ciertos límites. Es lo que denominamos elasticidad.

La fuerza externa  $F'$  aplicada a un resorte lineal para estirarlo puede graficarse en función de la deformación  $x$ . En la figura,



se han consignado puntos experimentales para dos resortes ① y ②. Los puntos correspondientes  $F(x)$  vs.  $x$  se sitúan sensiblemente sobre sendas rectas.

Se tiene:

$$\text{resorte ①: } F_1'(x) = \tan \varphi_1 \cdot x$$

$$\text{resorte ②: } F_2'(x) = \tan \varphi_2 \cdot x$$

$$\text{haciendo } k_1 = \tan \varphi_1 \quad \text{y} \quad k_2 = \tan \varphi_2$$

$$F_1'(x) = k_1 x \quad \text{y} \quad F_2'(x) = k_2 x$$

Las fuerzas restauradoras o fuerzas elásticas de estos resortes son

$$F_1(x) = -F_1'(x) \quad \text{y} \quad F_2(x) = -F_2'(x)$$

O sea, finalmente,

$$F_1(x) = -k_1 x \quad \text{y} \quad F_2(x) = -k_2 x$$

$k_1$  y  $k_2$  son las constantes elásticas o coeficientes de rigidez de ambos resortes. Del gráfico anterior se observa que para lograr una misma deformación en ambos resortes se necesita aplicar una fuerza externa mayor en el caso del resorte (2) que para el resorte (1): se dice que el resorte (2) es más rígido o más "duro" que el (1).

Las constantes  $k$  se expresan en  $\text{N/m}$  en el sistema S.I.

La longitud no deformada de un resorte se conoce como su "longitud natural", usualmente denominada como  $l_0$ .

Corrientemente las deformaciones  $x$  se miden a partir del extremo libre del resorte estando este en su longitud natural.

Si el resorte puede asimismo comprimirse, por tener sus espiras separadas, se tendrá deformaciones negativas (en caso que el sentido positivo del eje  $x$  se haya elegido en el sentido de los alargamientos).

El sistema masa-resorte constituye un oscilador armónico simple. Consideremos primero el caso de la figura, donde se encuentra en posición horizontal y donde no hay fricción (oscilador ideal).