

GRAVITACIÓN

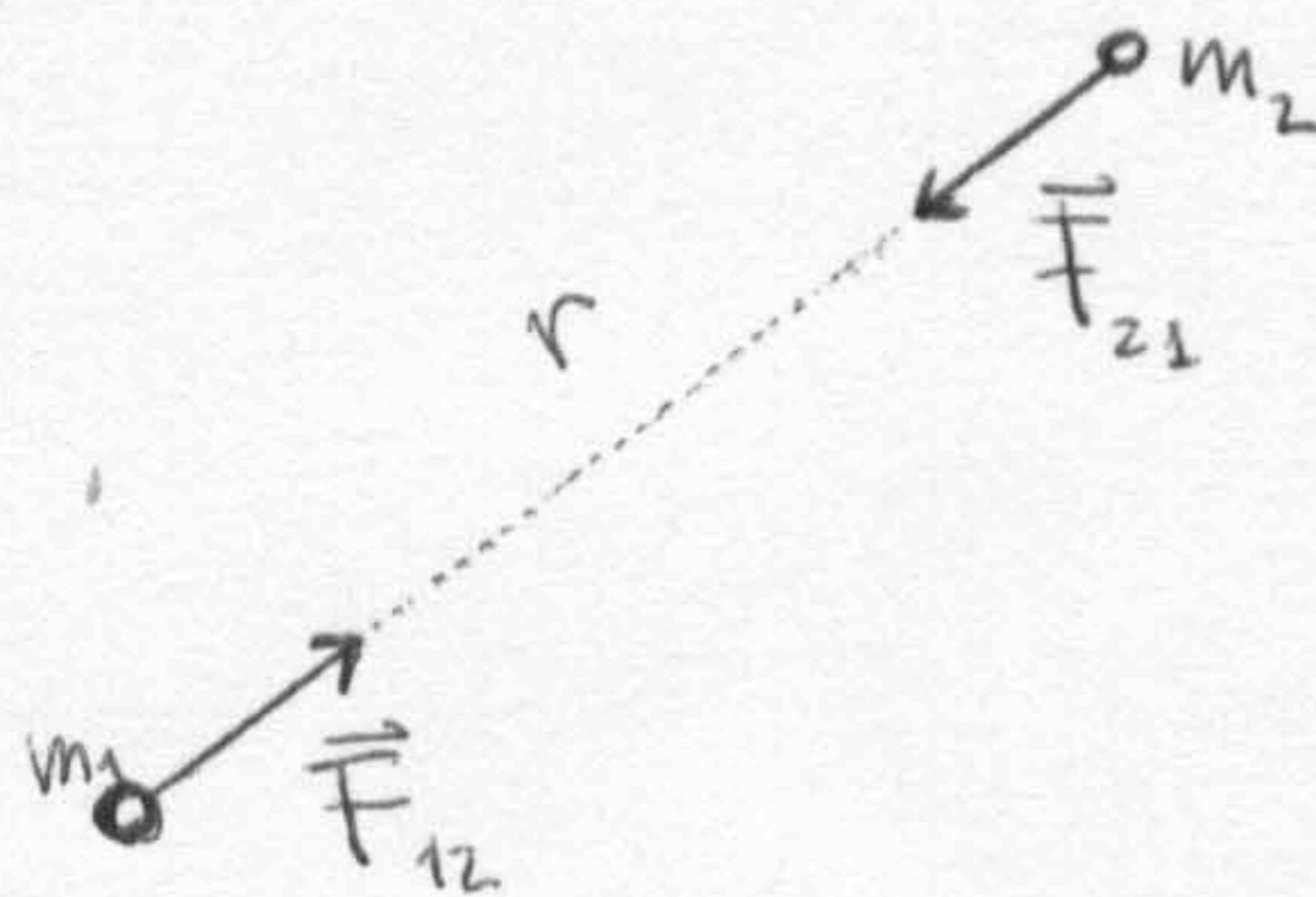
Ley de la gravitación universal

Newton enuncia esta ley: "Cualquiera partícula en el universo atrae a cualquiera otra con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas".

De acuerdo con esto, si las masas son m_1 y m_2 y la distancia es r , la magnitud de la fuerza con que se atraen es:

$$F_{12} = F_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Vectorialmente: $\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$



El signo negativo describe el carácter atractivo de la fuerza.

La constante G de proporcionalidad es la constante de gravitación universal, su valor es:

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right]$$

Variación de la aceleración de gravedad con la altura

Considerando un cuerpo a una altura h sobre la superficie de la tierra, su distancia al centro de ella es ahora $R+h$, y por lo tanto su aceleración ahora es:

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = mg = g(h)$$

¿Cuál es el error que se comete al usar $g(0)$ en puntos a una altura h ?

Reescribiendo $(R+h)^2$ como $R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$, la aceleración $g(h)$ queda

$$\text{como: } g(h) = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

Se puede aproximar: $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $|x| \ll 1$, como $h \ll R$, se tiene que $\frac{h}{R} \ll 1$, así,

$$g(h) = \underbrace{\frac{GM}{R^2}}_{g_0} \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) = \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) g_0$$

$$\text{Así el error es: } e\% = \frac{g_0 - g(h)}{g_0} \cdot 100 = \frac{2h}{R} \cdot 100 \quad (h=100\text{km} \Rightarrow e \approx 3\%)$$

Trabajo y Energía potencial en gravitación

El trabajo de las fuerzas gravitacionales actuando sobre una partícula m cuando esta se desplaza desde un punto \vec{r}_1 hasta otro punto \vec{r}_2 se calcula, por definición,

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Poniendo $\vec{r} = r \hat{r} \Rightarrow d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\hat{r}$

entonces,
$$dW = - \frac{GMm}{r^2} (dr \hat{r} \cdot \hat{r} + r \hat{r} \cdot d\hat{r})$$

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$$

$$d\hat{r} \cdot \hat{r} + \hat{r} \cdot d\hat{r} = 0 \Rightarrow 2d\hat{r} \cdot \hat{r} = 0$$

$$dW = -GMm \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow W = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

Se observa que el trabajo depende solamente de los puntos del espacio entre los cuales se desplazó la partícula m y no del camino seguido. Cuando el trabajo de una fuerza tiene estas características se dice que la fuerza es conservativa.

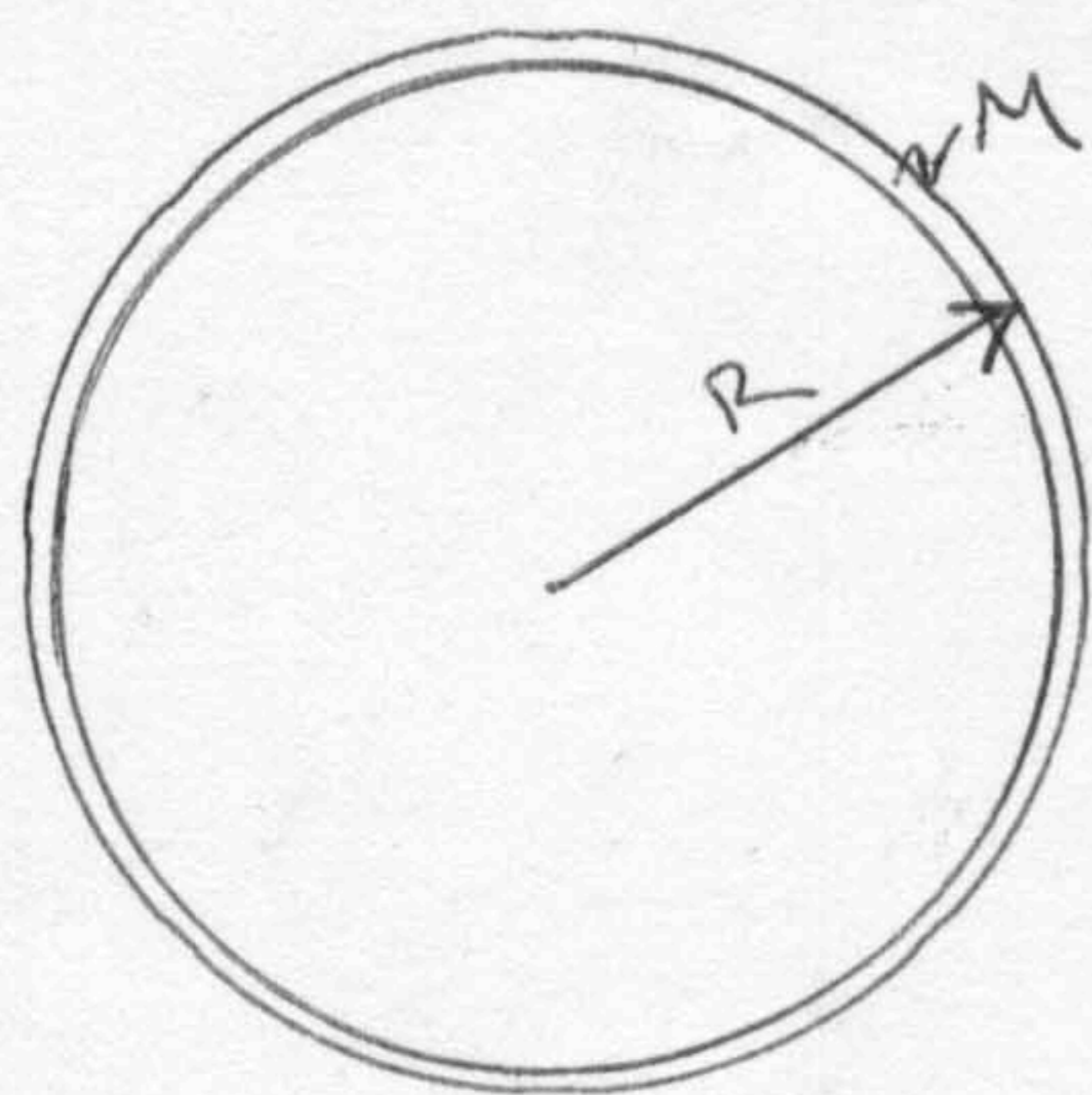
Se define la función escalar de posición: $U = - \frac{GMm}{r}$

la energía potencial de la partícula en el campo gravitacional de M .

Finalmente se tiene que:

$$W = -\Delta U$$

Campo gravitacional y energía potencial gravitacional de una cáscara esférica de radio R y masa M



$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad r > R$$

$$\vec{F} = \vec{0} \quad r < R$$

$$U = - \frac{GMm}{r} \quad r > R$$

$$U = - \frac{GMm}{R} \quad r < R$$

Campo gravitacional y energía potencial gravitacional de una esfera maciza

Si observamos que el campo de fuerzas de una cáscara esférica para una masa m en su exterior es $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ nos damos cuenta que es idéntico al que corresponde a una masa M concentrada en el centro de la cáscara. De este modo, imaginando la esfera maciza como una compuesta de cáscaras esféricas sucesivas, cada una de ellas contribuye al campo en un punto exterior como si masas se encontraran concentradas en el centro común, que es precisamente el de la esfera maciza. Por lo tanto,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r^2} \sum M_i = -\frac{GMm}{r^2} \quad \text{con } \sum M_i = M$$

Análogamente, $U(r) = -\frac{GMm}{r} \sum M_i = -\frac{GMm}{r}$

Para $r < R$, consideremos un punto P interior a la distancia r del centro una superficie esférica de radio r . Entonces, todas las cáscaras con radios mayores que r y hasta $r=R$, no contribuyen al campo en P . Solo contribuyen las interiores. Así,



$$\vec{F}(r) = -\frac{GM'm}{r^2} \hat{r} \quad \text{donde } M' = \text{masa esfera radio } r$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'} \Rightarrow M' = \frac{V'}{V} M = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3 M}{R^3}$$

$$\vec{F} = -\frac{GM}{R^3} r \hat{r} \quad \parallel \quad (r < R)$$

Y se puede demostrar que: $U = \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \quad \parallel \quad r < R$

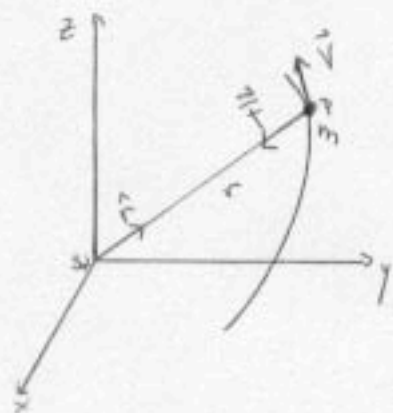
Movimiento planetario. Leyes de Kepler

Nicolás Copérnico propone el sistema planetario heliocéntrico: la tierra junto a los demás planetas entonces conocidos se encontrarían girando en torno al sol en órbitas circulares.

Johannes Kepler elabora un modelo matemático de estos movimientos que queda plasmada en sus tres famosísimas leyes del movimiento planetario.

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.
2. Ley de las áreas: El radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse.

Cien años más tarde Newton deduce estas leyes empíricas a partir de su Ley de Gravitación Universal.



Para toda posición del planeta P, la fuerza gravitacional \vec{F} apunta siempre en dirección al Sol, en el origen del sistema inercial de coordenadas. El momento \vec{M}_0 de esta fuerza con respecto al origen O es evidentemente nulo.

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = r \hat{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \right) = \vec{0}$$

De la ecuación rotacional $\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$ se concluye entonces que el momento angular \vec{L}_0 es una constante del movimiento: $\vec{L}_0 = \vec{cte}$.

Esto implica que tanto la magnitud como la dirección del vector momentum angular permanecen constantes.

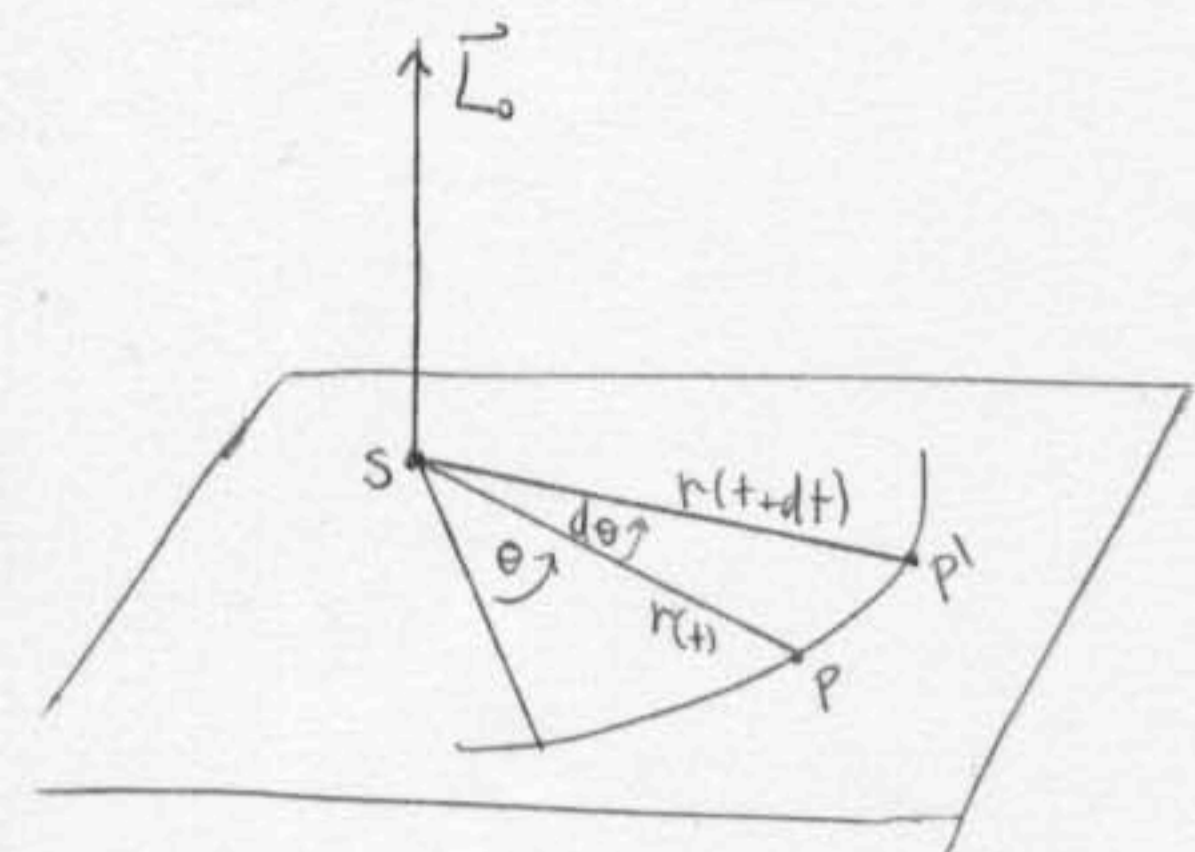
Expresemos el momentum angular \vec{L}_0 anterior en coordenadas polares. Recordemos que la velocidad \vec{v} en estas coordenadas tiene la forma:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad \text{con } \dot{\theta} = \omega$$

entonces,
$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ &= r \hat{r} \times m (r \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \hat{k} \end{aligned}$$

Así,
$$\underline{\vec{L}_0 = m r^2 \omega \hat{k}} \quad ; \quad \underline{L_0 = m r^2 \omega}$$

Ley de las áreas



Consideremos dos posiciones infinitesimales próximas de un planeta sobre su trayectoria elíptica, correspondiente a instantes t y $t+dt$. El "área barrida" por el radio vector en el intervalo dt de tiempo resulta igual al área del "triángulo" $SP P'$:

$$dA \approx \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

de modo que: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$

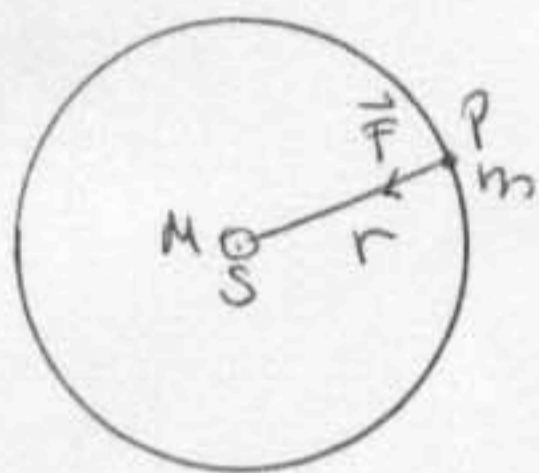
Pero, de lo visto anteriormente, $r^2 \dot{\theta} = cte$ pues $m = cte$ y $\vec{L}_0 = cte$

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L_0}{m} = l_0 = cte, \quad l_0 \text{ el momento angular por unidad de masa.}$$

por lo que: $\frac{dA}{dt} = cte = \frac{1}{2} l_0$ Velocidad
areolar

Tercera ley de Kepler

Para simplificar el tratamiento consideremos una órbita circular:



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{F}_c = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}$$

$$\therefore \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (\text{*)}$$

Llamando T al periodo de tiempo empleado por el planeta en recorrer su órbita, la velocidad v se expresa como: $v = \omega r$

y como $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi}{T} r$

Reemplazando en (*): $\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte \parallel \parallel$

En una trayectoria elíptica el resultado es: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \parallel \parallel$

donde "a" es el semieje mayor de la elipse.

Consideraciones energéticas relacionadas con el movimiento de satélites y planetas

Consideremos un cuerpo de masa m que se mueve en las inmediaciones de un cuerpo masivo M , con $M \gg m$. Si el sistema puede considerarse como aislado, la energía total E , es constante y, por lo tanto, para dos puntos a las distancias r_1 y r_2 del centro de M :

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Para calcular la velocidad inicial que habría que impartirle a un cuerpo para que escapara de la atracción terrestre, alejándose indefinidamente, haciendo $r_1 = R$, $M = M_T$ y $r_2 \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_T m}{R} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Como $\frac{1}{2} m v_2^2 > 0$, entonces $\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_T m}{R} \geq 0$

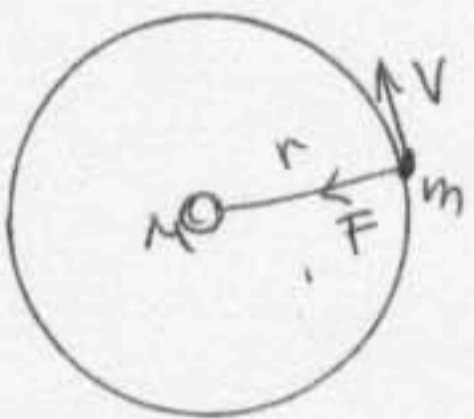
La igualdad corresponde al caso en que $v_2 = 0$ en $r_2 \rightarrow \infty$. Así se encuentra que la velocidad debe ser:

$$v_1 \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

A la menor velocidad se le denomina "velocidad de escape, v_e ": $v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$

Examinando la ecuación $E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$ se observa que la energía del sistema puede ser positiva, negativa o nula, dependiendo del valor de la velocidad v que se dé a la masa m .

Por ejemplo, un satélite que gira en torno a un planeta de masa M , en una órbita circular cerrada:



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{F}_c = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}$$

$$\therefore \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{2r}$$

Luego, la energía del sistema es: $E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$

Tenemos entonces que en el caso de sistemas ligados (órbitas circulares y elípticas), la energía total mecánica es negativa.

Se tiene también que: Si $E=0$, la trayectoria es parabólica
 Si $E>0$, la trayectoria es hiperbólica.

Traectorias en un campo gravitacional

Las trayectorias posibles, dependiendo de las condiciones iniciales, son curvas conocidas como secciones cónicas.

Se establecerá que son del tipo:
$$r = \frac{l_0^2 / GM}{1 + e \cos \theta}$$

donde l_0 es una constante del movimiento, el momentum angular por unidad de masa ya visto.

La constante e es la llamada "excentricidad" de la cónica y de su valor depende su forma.

Así, $e=0 \rightarrow$ se trata de una circunferencia

$e<1 \rightarrow$ se trata de una elipse

$e=1 \rightarrow$ se trata de una parábola

$e>1 \rightarrow$ se trata de una hipérbola.

Un cierto tipo de lanzamiento consiste en llevar la masa m hasta una distancia r_0 e imprimiéndole allí una rapidez v_0 perpendicularmente al radio vector r_0 (lanzamiento perigeo)

De acuerdo con el valor de v_0 , se pueden lograr los distintos tipos de trayectoria: su excentricidad es:

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$$

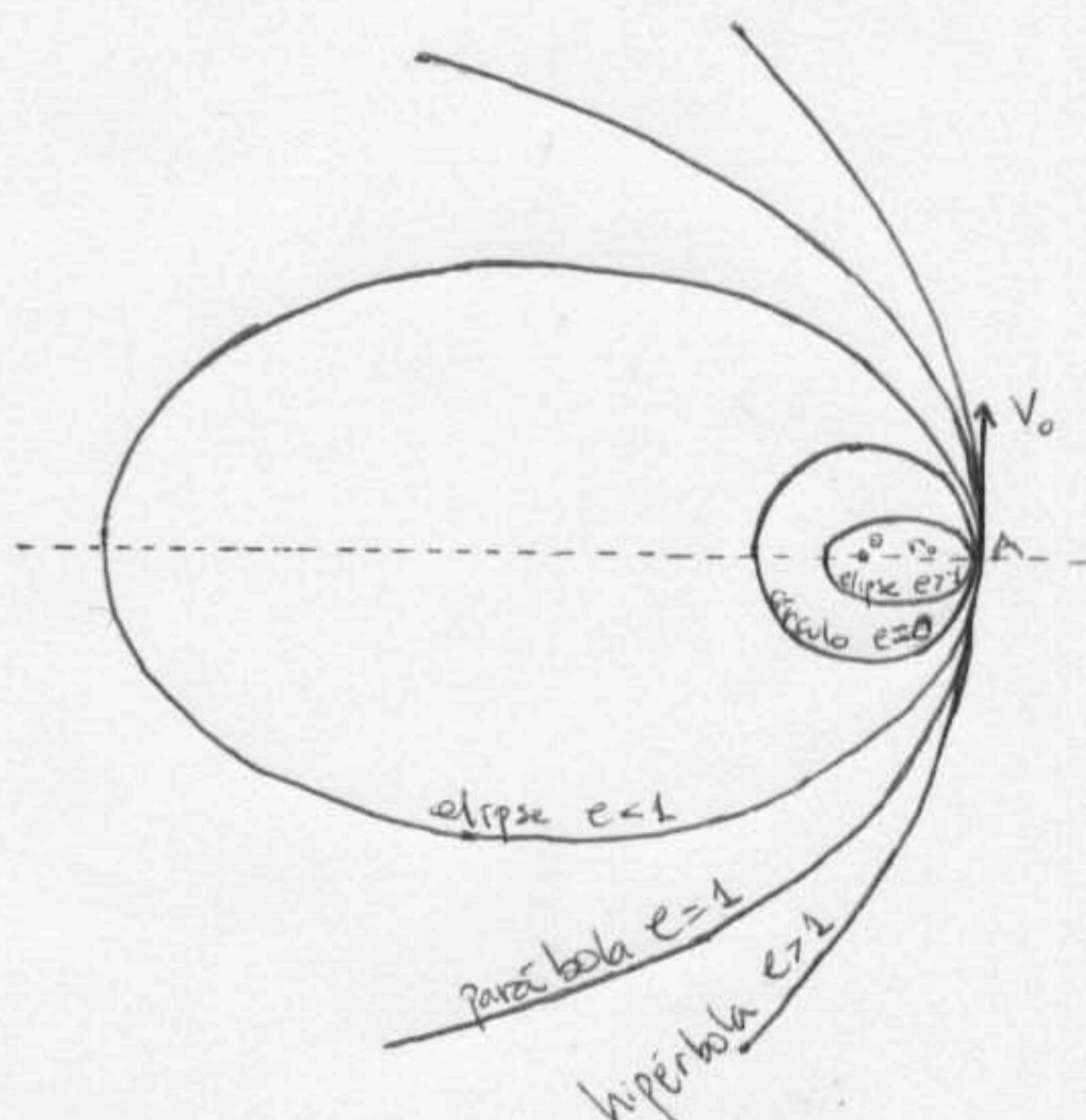
$\rightarrow -1 < e < 0 \rightarrow 0 < v_0 < \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ (atracción en foco izquierdo)

$\rightarrow e=0 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$

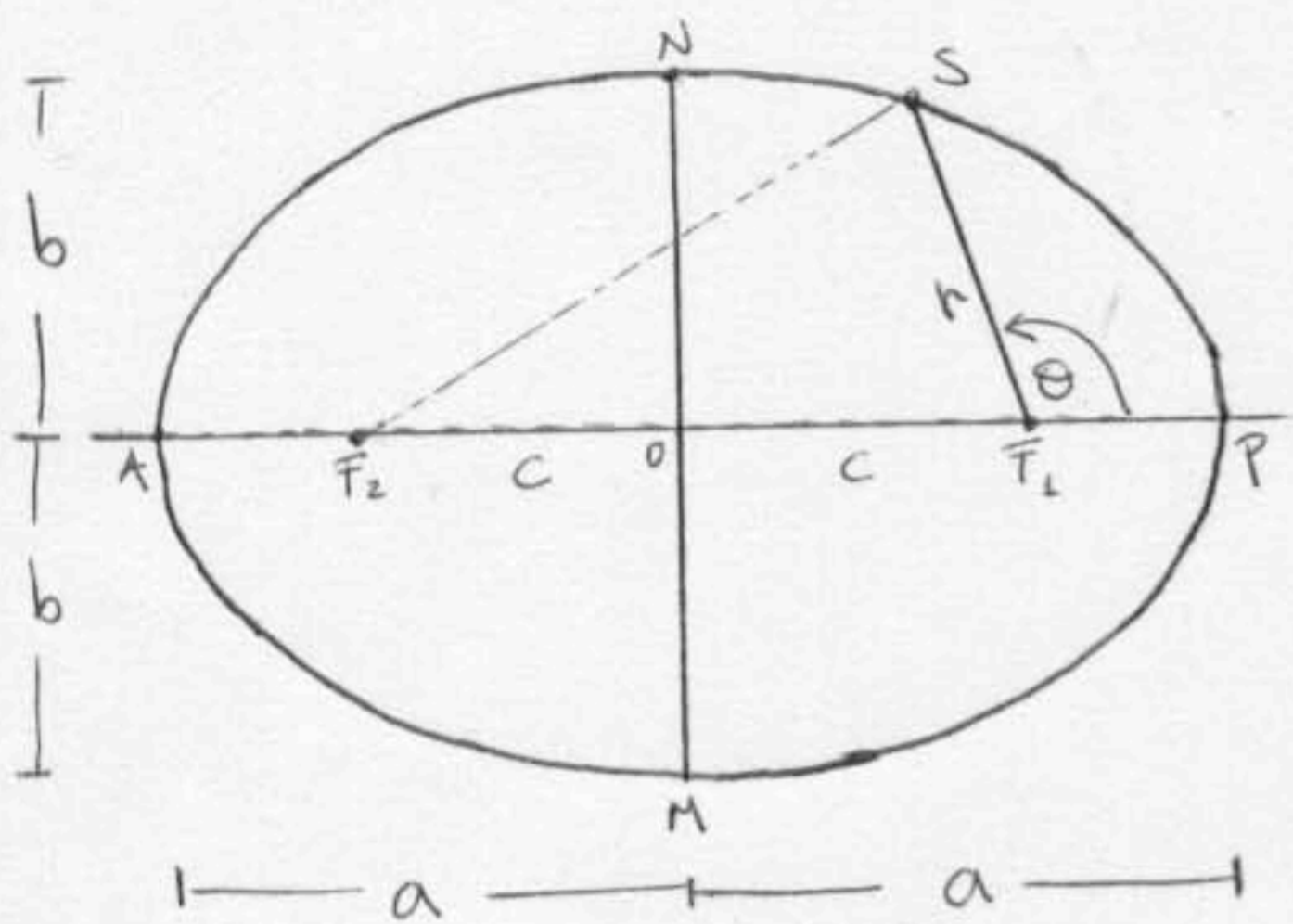
$\rightarrow 0 < e < 1 \rightarrow \sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$
 (atracción en foco derecho)

$\rightarrow e=1 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

$\rightarrow e>1 \rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$



Geometría de la elipse



Ejes principales:

$$AP = 2a \quad (\text{eje mayor})$$

$$MN = 2b \quad (\text{eje menor})$$

$$OA = OP = a \quad (\text{semieje mayor})$$

$$MO = ON = b \quad (\text{semieje menor})$$

O : centro de la elipse

Sobre el eje mayor distinguimos dos puntos equidistantes del centro: los focos F_1 y F_2 de la elipse, tal que $OF_1 = OF_2 = c$ (distancias focales)

Tienen la propiedad que la suma de sus distancias a un punto cualquiera de la elipse es constante e igual a $AP = 2a$:
$$F_1S + F_2S = 2a$$

En particular, $F_1N = F_2N = a$

de donde se desprende que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Por otra parte, la excentricidad e de la elipse se expresa como $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$)

En coordenadas cartesianas la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

mientras que en polares, cuando el origen o polo se encuentra en el foco derecho F_1 , la ecuación tiene la forma:

$$r = \frac{\frac{l_0^2}{GM}}{1 + e \cos \theta} \quad (*)$$

Mientras que si se adopta el foco izquierdo F_2 como polo, la ecuación toma la forma:

$$r = \frac{\frac{l_0^2}{GM}}{1 - e \cos \theta}$$

La mínima distancia de F_1 a la elipse es $F_1P = r_p$. El punto P , si se trata de la órbita de un satélite en torno a la tierra, recibe el nombre de perigeo. Si se trata de un planeta en torno al sol entonces se le denomina perihelio. La máxima distancia de F_1 a la elipse es $F_1A = r_a$ conocida como apogeo si se trata de la tierra o afelio, si se trata del sol.

Se cumple que: $r_A + r_P = 2a$

En (*), $\theta = 0 \Rightarrow r_P = \frac{l_0^2 / GM}{1 + e}$

$\theta = \pi \Rightarrow r_A = \frac{l_0^2 / GM}{1 - e}$

Además, se puede demostrar que: $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$

Otras relaciones útiles que damos sin demostración son:

$E = \frac{l_0^2 / GM}{2a}$

$V^2 = GM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$

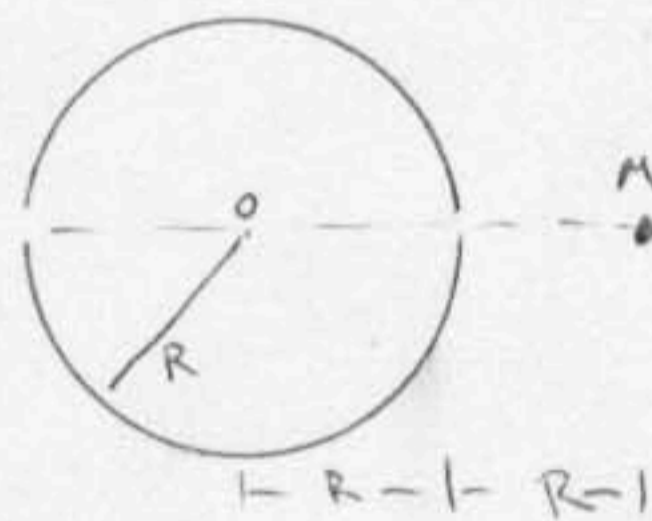
Además, el área de una elipse es: $A = \pi ab$ de modo que el periodo de revolución o periodo orbital T es:

$T = \frac{\text{área elipse}}{\text{velocidad areolar}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2} l_0}$

Algunos Ejercicios

1. Una cáscara esférica de masa M y radio R tiene dos perforaciones diametralmente opuestas. Sobre la línea de estas perforaciones y a la distancia $2R$ de su centro se ubica una partícula de masa m (igual a la de la cáscara). El sistema descrito se encuentra inicialmente en reposo. La mutua atracción gravitacional entre estos cuerpos hace que ellos se aproximen al dejarlos en libertad.

→ Calcular el tiempo transcurrido entre los instantes de entrada y salida de la partícula de la cáscara esférica.

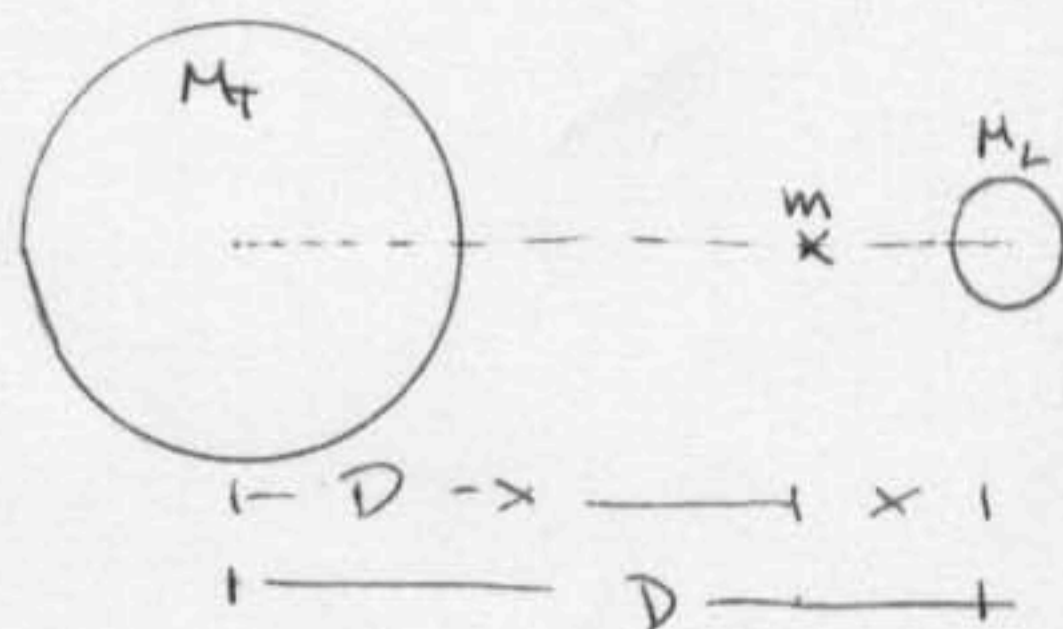


2. Existe un punto en la línea que une los centros de la Tierra y la Luna en el cual la suma de las fuerzas es nula.

→ Encontrar la posición de ese punto.

→ Calcular la velocidad con que debería lanzarse un cuerpo para que llegara a dicho pto. con vel. nula.

→ Si se le diera al cuerpo una velocidad ligeramente superior a la recién determinada, Calcular la velocidad con que llegaría a la superficie lunar.



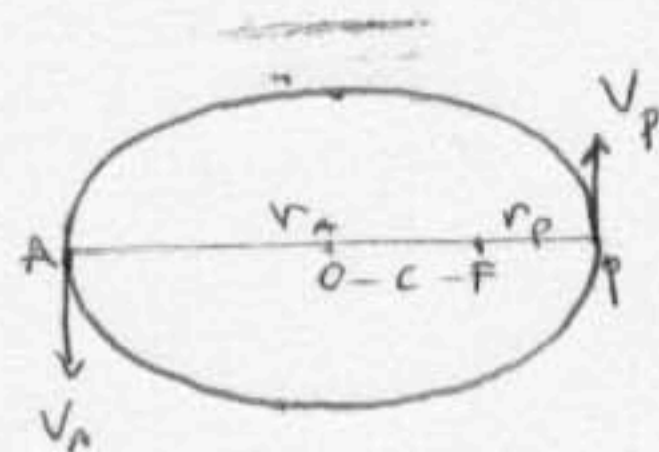
Datos: G, M_T, M_L, D

3. La distancia del centro de la tierra al apogeo y perigeo de un satélite en órbita son r_a y r_p .

→ Determinar las velocidades v_a y v_p del satélite al pasar por dichos puntos.

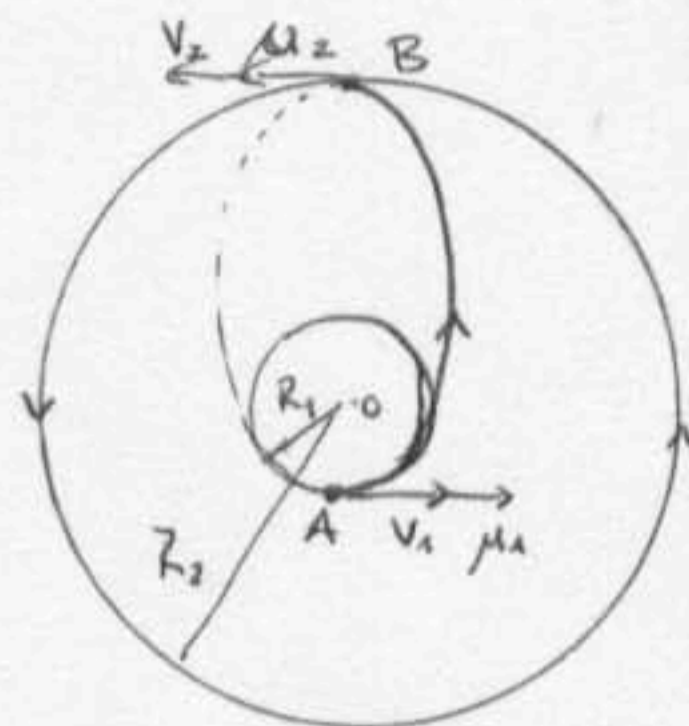
→ Determinar la excentricidad de la órbita e .

→ Calcular su semieje mayor a y el semieje menor b en términos de r_a y r_p .



4. Una nave que se encuentra en órbita circular de radio R_1 debe ser llevada hasta una órbita circular de radio $R_2 > R_1$.

Para que pueda abandonar la primera órbita la nave debe acelerar desde la velocidad v_1 que tiene en ella hasta una velocidad μ_1 que corresponda a la velocidad en el perigeo de una órbita elíptica cuyo apogeo está en B, a la distancia R_2 del centro O. Al alcanzar el punto B (apogeo), donde pasa con una velocidad μ_2 , debe acelerar nuevamente para alcanzar la velocidad v_2 correspondiente a la órbita circular de radio R_2 .



→ Calcular μ_1 y μ_2 en términos de v_1 y v_2 respectivamente.

5. Un cohete transporta un satélite hasta un punto situado a 800 km sobre la superficie terrestre. Determinar el valor de la rapidez v_0 paralela a la superficie para que el satélite tome:

→ Una órbita elíptica de altitud máxima igual a 8000 km

→ Una órbita parabólica que lo saque del campo de atracción terrestre.

6. Se ha determinado que la rapidez máxima de un cierto satélite que orbita la tierra en una trayectoria elíptica de excentricidad $e=0,25$ es de $25.700 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$

→ Determinar las distancias máxima y mínima a la superficie de la tierra durante su recorrido expresadas en kilómetros.

→ Determinar su periodo orbital.