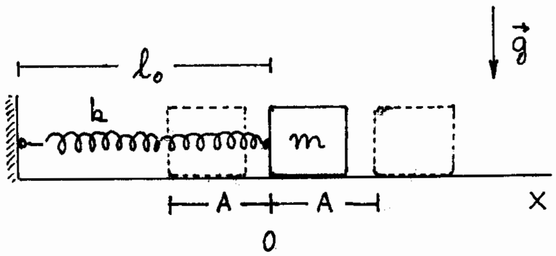


Si inicialmente la masa m es apartada de la posición de equilibrio hacia la derecha una distancia $x = A$ y luego se deja libre, por ejemplo, sin velocidad inicial, la masa, bajo la acción de la fuerza restauradora del resorte $F = -kx$, oscilará con M.A.S. entre las posiciones $(-A)$ y $(+A)$. En condiciones ideales, es decir, sin disipación de energía, la oscilación tendría carácter permanente. Este oscilador constituye un oscilador armónico.

Su frecuencia: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

El movimiento, de las condiciones iniciales expuestas, es

$$X = A \cos \sqrt{\frac{m}{k}}\, t$$

Verifiquemos esto último. La ecuación diferencial del movimiento es

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad o \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{con } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Sabemos que la solución general es del tipo:

$$X = A_1 \cos\omega t + A_2 \operatorname{sen}\omega t$$

o equivalentemente, $x = C\cos(\omega t + \delta)$

Escojamos la primera. De las condiciones iniciales:

en $t = 0$, $X(0) = A$ y $v(0) = 0$, obtenemos

$$A = A_1$$

En seguida, derivando respecto del tiempo obtenemos la velocidad $v(t)$:

$$v(t) = -\omega A_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega A_2 \cos \omega t$$

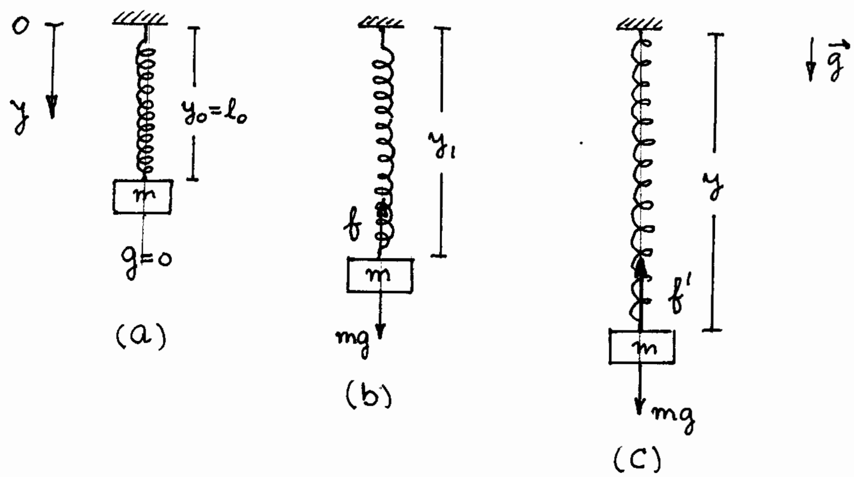
Aquí, con la condición $v(0)=0$ en $t=0$ se encuentra:

$$0 = 0 + \omega A_2 \longrightarrow \boxed{A_2 = 0} \quad \text{ya que } \omega \neq 0 .$$

De modo que con $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ la posición en función del tiempo es $\quad X(t) = A \cos \omega t$

Si hubiésemos optado por la solución general alternativa es fácil demostrar que habríamos obtenido $C = A$ y $\delta = 0$, es decir, la misma ecuación itinerario $x(t) = A \cos \omega t$.

Sistema masa-resorte en posición vertical.



Consideremos el mismo sistema masa resorte de la página 48, pero ahora suspendido de uno de sus extremos: el sistema cuelga verticalmente.

En la figura (a) imaginamos el sistema con gravedad nula, ésto es, $g=0$. Entonces su longitud y_0 es igual a su longitud natural l_0 del caso horizontal

En la figura (b) el sistema está en equilibrio estático bajo la acción de la gravedad g, con una longitud y_1. Se tiene entonces que:

$$mg - k(y_1 - l_0) = 0 \qquad (1)$$

En la figura (c), la masa ha sido desplazada hasta alcanzar una longitud l del resorte: $y > y_1 > l_0$.

Al soltar la masa, sobre ella actúa una fuerza resultante F:

$$F = mg - k(y - l_0) \qquad (2)$$

De (1): $mg = k(y_1 - l_0)$, de modo que:

$$F = k(y_1 - l_0) - k(y - l_0)$$

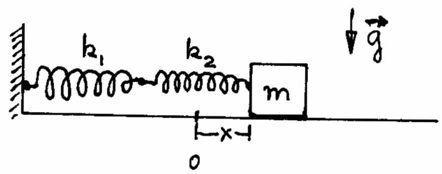
$$\therefore \boxed{F = -k(y - y_1)} \qquad (3)$$

$y - y_0$ es la deformación del resorte respecto de la posición de equilibrio vertical tomada como origen. Este último resultado muestra que la fuerza constante mg no afecta las características del oscilador: su frecuencia angular sigue siendo $\omega = \sqrt{k/m}$ y por lo tanto su período T sigue siendo el mismo que cuando se encuentra en posición horizontal.

Tampoco variará el período al colgar un canastillo para colocar pesas, pues representa otra fuerza constante.

Problemas misceláneos con resortes.

1. Calcular los períodos de oscilación de las configuraciones que se indican.

a) 

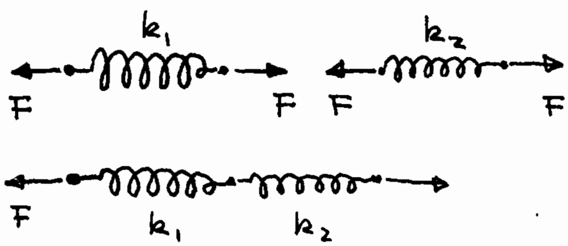
Resortes en "serie"

Previamente calcularemos la "constante equivalente k" del conjunto, lo que equivale a reemplazar el sistema de resortes por un resorte único de constante k.

En un estiramiento x, contribuyen las deformaciones x_1 y x_2 de los resortes individuales:

$$X = X_1 + X_2 \qquad (1)$$

Del equilibrio del sistema se tiene que las fuerzas que producen las deformaciones X_1 y X_2 son de igual magnitud F:



$$X_1 = \frac{F}{k_1} \quad ; \quad X_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$X = \frac{F}{k}$$

Reemplazando en (1) : $\dfrac{F}{k} = \dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2}$

o sea $\boxed{\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}$ o $\boxed{k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

La generalización para n resortes en serie es inmediata.

Por lo tanto, la fuerza restauradora es $F = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1+k_2}\,x$

Luego, $\omega^2 = \dfrac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{k_1 k_2}\,m}$

Una variante consiste en cortar un resorte de longitud l en dos trozos, uno de longitud $l_1 = \frac{1}{3}l$ y el otro de $l_2 = \frac{2}{3}l$. Calcular las rigideces de ambos pedazos, sabiendo que la rigidez del resorte original es k.

Se tiene: $l = l_1 + l_2$

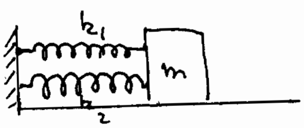
Además, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{l}{3}\,\dfrac{3}{2l}$ o sea, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{l_1}{l_1+l_2} = \dfrac{1}{1+2}$

de donde se tiene: $l_1 = \frac{1}{3}l$ y $l_2 = \frac{2}{3}l$.

de donde $\Delta l_1 = \frac{1}{3}\Delta l$ y $\Delta l_2 = \frac{2}{3}\Delta l$.

y $\dfrac{F}{k_1} = \dfrac{F}{3k}$ $\qquad \dfrac{F}{k_2} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{F}{k}$

Finalmente, $\boxed{k_1 = 3k}$ y $\boxed{k_2 = \frac{3}{2}k}$

b) 

$F = F_1 + F_2$ fuerza resultante

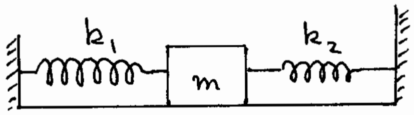
$F = -k_1 x - k_2 x$ <u>Resortes en "paralelo"</u>.

$\quad = -(k_1+k_2)x$

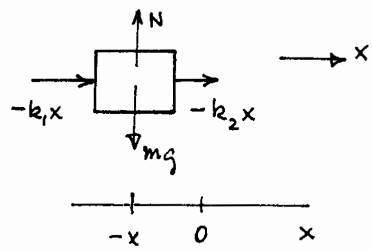
Luego, $\boxed{k = k_1 + k_2}$ Rigidez equivalente.

$\therefore\ \omega^2 = \dfrac{k_1+k_2}{m} \qquad \therefore\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$.

c)



Por ejemplo, si desplazamos en x hacia la izquierda de la posición de equilibrio, las fuerzas elásticas sobre el bloque se muestran en el D.C.L.

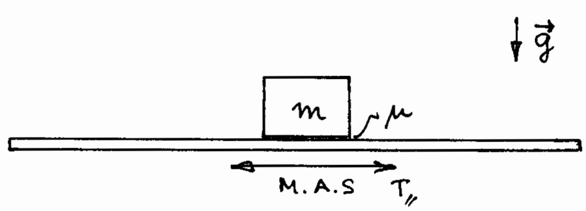


$$F = -(k_1 + k_2)x$$

$$\therefore \boxed{k = k_1 + k_2}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

2. Sobre un tablón horizontal rugoso que está oscilando longitudinalmente con movimiento armonico simple de período conocido T se encuentra un bloque de masa m. El coeficiente de roce estático entre el bloque y el tablón es μ.
Calcular la máxima amplitud que puede dársele al tablón sin que el bloque deslice sobre él.



La aceleración del sistema es $a = -\omega^2 x$ (1)

y como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (2)

$$\therefore \quad a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x \qquad (3)$$

Como la aceleración máxima se tiene para $x = \pm A$, donde A es la amplitud, entonces, de (3):

$$a_{máx} = \frac{4\pi^2}{T^2} A \quad (4) \quad (\text{en valor absoluto})$$

La fuerza responsable de acelerar al bloque es la fuerza de roce, que tiene un valor máximo igual a

$$f_{máx} = \mu m g \quad (5)$$

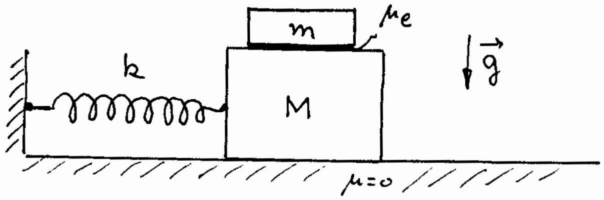
Por lo tanto, la maxima aceleración que ésta puede impartirle al bloque m es:

$$a_{max} = \frac{f_{máx}}{m} = \frac{\mu \cancel{m} g}{\cancel{m}} = \mu g \quad (6)$$

Igualando (4) = (6):

$$\frac{4\pi^2}{T^2} A = \mu g \longrightarrow \boxed{A_{máx} = \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}}$$

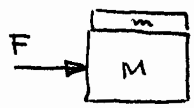
3. En el sistema de la figura, un bloque de masa m descansa sobre otro de masa M. Este ultimo tiene comprimido un resorte de constante k en una cantidad δ. Si no hay roce entre M y el plano horizontal pero sí lo hay entre los dos bloques (μ_e), determinar el máximo valor de δ para el que no se produce deslizamiento relativo entre los dos bloques.



A la partida se tiene la máxima aceleración, que corresponde a la fuerza restauradora del resorte cuando está comprimido en δ.

$$a = \frac{F}{M+m}$$

$$= \frac{k\delta}{M+m} \quad (1)$$



La fuerza de roce sobre m de parte de M la acelera:

$$\therefore \quad f_{max} = \mu m g \quad (2)$$

De (1) y (2), la ecuación de movimiento es

$$\mu m g = \frac{m \; k\delta_{max}}{M+m}$$

$$\therefore \quad \boxed{\delta_{max} = \frac{(M+m)\mu g}{k}}$$