

Pauta pregunta 2 control 5 2006

Tenemos primero que encontrar la velocidad de salida del líquido. Para esto, usamos Bernoulli entre las alturas h_1 y h_3 (si se hace primero entre h_1 y h_2 , y luego entre h_2 y h_3 , se llega a lo mismo).

Entonces:

$$B_1 = P_0 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad B_3 = P_0 + \rho gh_3 + \frac{\rho v_3^2}{2}$$

pero, tenemos que $v_1 \approx 0$

$$\text{Se tiene entonces : } P_0 + \rho gh_1 = P_0 + \rho gh_3 + \frac{\rho v_3^2}{2} \implies v = v_3 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

Ahora analizamos el movimiento parabólico: (Colocamos el origen en la esquina inferior derecha del tambor)

Condiciones iniciales:

$$v_x = v \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2g(h_1 - h_3)} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{g(h_1 - h_3)} \quad \text{similarmente, } v_y = \sqrt{g(h_1 - h_3)}$$

$$x_0 = (h_3 - h_1) \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = (h_3 - h_1) \quad y_0 = h_3$$

$$x(t) = x_0 + v_x t \quad y(t) = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

Para ver el alcance máximo, debemos ver el tiempo t^* en que la posición $y(t)$ se anula:

$$t^* = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 4 \frac{g}{2} y_0}}{-2 \frac{g}{2}} \quad t^* = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gy_0}}{g} \quad t^* = \frac{\sqrt{g(h_1 - h_3)} \pm \sqrt{g(h_1 + h_3)}}{g}$$

Se rechaza la solución negativa, pues no corresponde a la solución del problema, y evaluamos en $x(t)$ para encontrar el máximo alcance:

$$d = x(t^*) = h_3 - h_2 + \sqrt{g(h_1 - h_3)} t^* = h_3 - h_2 + (h_1 - h_3) + \sqrt{h_1^2 - h_3^2} = h_1 - h_3 + \sqrt{h_1^2 - h_3^2}$$

Cabe mencionar que al problema se podía hacer de varias maneras, pero esta era la más corta.