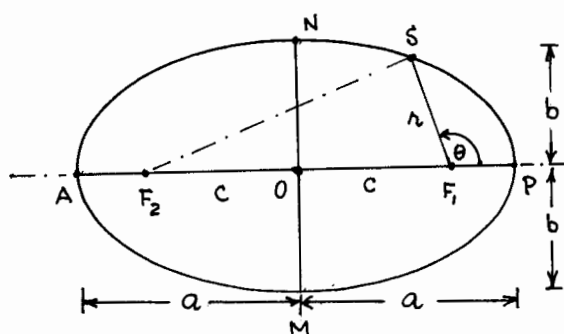


## Geometría de la elipse.

Los planetas en torno al sol describen órbitas elípticas, lo mismo que los satélites en torno a sus planetas. En particular, la tierra posee un satélite natural y un sinnúmero de satélites artificiales. En todos estos casos se trata de sistemas ligados, ésto es, que describen órbitas cerradas: elipses y circunferencias. Se hace necesario entonces resumir algunas propiedades y relaciones relativas a estas curvas.



Ejes principales:

$$AP = 2a \quad (\text{eje mayor})$$

$$MN = 2b \quad (\text{eje menor})$$

O: centro de la elipse

$$OA = OP = a \quad (\text{semieje mayor})$$

$$MO = ON = b \quad (\text{semieje menor})$$

Sobre el eje mayor distinguimos dos puntos equidistantes del centro: los focos  $F_1$  y  $F_2$  de la elipse, tales que

$$OF_1 = OF_2 = c \quad (\text{distancias focales})$$

que tienen la propiedad que la suma de sus distancias a un punto cualquiera de la elipse es constante e igual a  $AP = 2a$

$$F_1S + F_2S = 2a$$

En particular,  $F_1N = F_2N = a$

de donde se desprende que 
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (29)$$

Por otra parte, la excentricidad  $e$  de la elipse se expresa en términos de  $a$  y  $c$ :

$$e = \frac{c}{a} \quad (30) \quad \text{de modo que } e < 1$$

En coordenadas cartesianas la ecuación de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en tanto que en coordenadas polares, donde el origen o polo se encuentra en el foco derecho  $F_1$  y el eje polar coincidente con  $OP$ ,

$$\boxed{r = \frac{l_0^2/GM}{1 + e \cos \theta}} \quad (31)$$

Cuando representa la órbita de un planeta o un satélite la constante del numerador contiene el momentum angular por unidad de masa  $l_0$ , determinado por las condiciones iniciales, la constante  $G$  de gravitación y la masa  $M$  de la fuente del campo.

En el caso en que se adopte el foco izquierdo  $F_2$  como polo, la ecuación toma la forma  $r = \frac{l_0^2/GM}{1 - e \cos \theta}$ .

La mínima distancia de  $F_1$  a la elipse es  $F_1P = r_p$ . El punto  $P$ , si se trata de la órbita de un satélite en torno a la tierra, recibe el nombre de perigeo. Si se trata de un planeta en torno al sol entonces se le denomina perihelio.

La máxima distancia de  $F_1$  a la elipse es  $F_1A = r_A$  conocida como apogeo si se trata de la tierra o afelio si se trata del sol.

Se cumple que  $\boxed{r_A + r_p = 2a}$  (32)

De (31), con  $\theta = 0 \rightarrow r_p = \frac{l_0^2/GM}{1 + e}$  (33)

con  $\theta = \pi \rightarrow r_A = \frac{l_0^2/GM}{1 - e}$  (34)

Además, se demuestra que

$$\boxed{e = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p}} \quad (35)$$

Otras relaciones útiles que damos sin demostración son

$$\boxed{E = \frac{h^2/GM}{2a}} \quad (36) \quad \text{y} \quad \boxed{v^2 = GM \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]} \quad (37)$$

Finalmente, el área de una elipse es  $\boxed{A = \pi ab}$

de modo que el período de revolución o período orbital  $T$  es

$$T = \frac{\text{área elipse}}{\text{veloc. areolar}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2} h_0}$$

Comentario. Las trayectorias elípticas de satélites y planetas son planas. En consecuencia el momento angular es un vector perpendicular al plano de la trayectoria. Por este motivo, en la práctica se trabaja escalarmente con la magnitud del vector. En general,

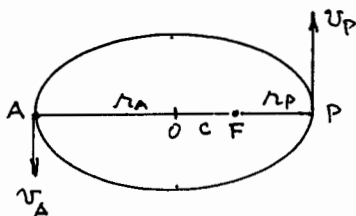
$$L_F = r(mv) \sin \varphi, \text{ donde } \varphi \text{ es el ángulo que forman } \vec{m}\vec{v} \text{ y } \vec{r}$$

En particular, en A y P las velocidades son siempre perpendiculares a  $r_A$  y  $r_P$  respectivamente de modo que en esos puntos  $\sin \varphi = 1$  y

$$L(A) = r_A m v_A \quad \text{y} \quad L(P) = r_P m v_P$$

### Problemas ilustrativos.

- La distancia del centro de la tierra al apogeo y perigeo de un satélite en órbita son  $r_A$  y  $r_P$ .
  - Determinar las velocidades  $v_A$  y  $v_P$  del satélite al pasar por dichos puntos.
  - Determinar la excentricidad de la órbita  $e$ .
  - Calcular su semieje mayor "a" y el semieje menor "b" en términos de  $r_A$  y  $r_P$ .



a) Constancia del momento angular :  $r_A m v_A = r_P m v_P$  (1)

Constancia de la energía mecánica :  $\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GMm}{r_P}$  (2)

Eliminando  $v_P$  entre las ecuaciones (1) y (2)

$$2GM \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right) = v_A^2 \left( \frac{r_A^2}{r_P^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow v_A^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_P}{r_A} \quad (3)$$

De (3) y (1) :

$$v_P^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P} \cdot \frac{r_A}{r_P} \quad (4)$$

b)

En una elipse :  $e = \frac{c}{a}$

También,  $a = \frac{r_A + r_P}{2}$

Además, se desprende también de la figura :  $2c = 2a - 2r_P$

O sea,  $c = \frac{r_A + r_P}{2} - r_P \rightarrow c = \frac{r_A - r_P}{2}$

Entonces, finalmente, 
$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

c) Está contestado en b) . 
$$a = \frac{r_A + r_P}{2}$$

Además, de  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$$= \sqrt{\frac{(r_A + r_P)^2}{4} - \frac{(r_A - r_P)^2}{4}}$$

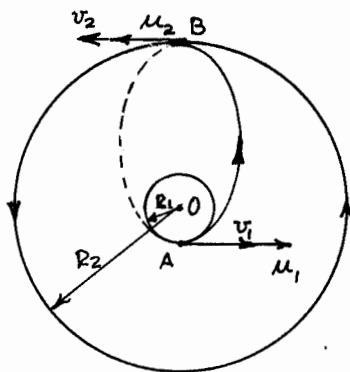
$$\therefore b = \sqrt{r_A r_P}$$

## 2. Transferencia entre órbitas circulares.

Una nave que se encuentra en órbita circular de radio  $R_1$ , debe ser llevada hasta una órbita circular de radio  $R_2 > R_1$ .

Para que pueda abandonar la primera órbita la nave debe acelerar desde la velocidad  $v_1$  que tiene en ella hasta una velocidad  $u_1$  que corresponda a la velocidad en el perigeo de una órbita elíptica cuyo apogeo está en B, a la distancia  $R_2$  del centro O. Al alcanzar el punto B (apogeo), donde pasa con una velocidad  $u_2$ , debe acelerar nuevamente para alcanzar la velocidad  $v_2$  correspondiente a la órbita circular de radio  $R_2$ .

Calcular  $u_1$  y  $u_2$  en términos de  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente.



a) Cálculo de  $v_1$  en la órbita circular  $R_1$ ,

$$-\frac{GMm}{R_1^2} = -m \frac{v_1^2}{R_1} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \quad (1)$$

Análogamente,

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}} \quad (2)$$

En la órbita elíptica el momentum angular  $L(A) = L(B)$ , ésto es:

$$R_1 \cdot m u_1 = R_2 \cdot m u_2 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (3)$$

Además, de la conservación de la energía mecánica,

$$E(A) = E(B) \rightarrow -\frac{GMm}{R_1} + \frac{1}{2} m u_1^2 = -\frac{GMm}{R_2} + \frac{1}{2} m u_2^2 \quad (4)$$

$$\text{De (1): } \frac{GM}{R_1} = v_1^2 \quad \text{y} \quad \frac{GM}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} v_1^2; \quad \text{Además, de (3): } u_2 = \frac{R_1}{R_2} u_1$$

$$\text{Reemplazando estos valores en (4): } u_1^2(R_1^2 - R_2^2) = 2R_2(R_1 - R_2)v_1^2$$

o, finalmente,

$$u_1 = \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} v_1 \quad (5) \quad \therefore u_1 > v_1$$

En seguida, de (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (6)$$

Además, de  $\mu_2 = \frac{R_1}{R_2} \mu_1$

$$\mu_2 = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} v_1 \quad (7)$$

Eliminando  $v_1$  entre (6) y (7)  $\rightarrow \boxed{\mu_2 = \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}} v_2} \quad (8) \quad \mu_2 < v_2$

3. Un cohete transporta un satélite hasta un punto situado a 800 km sobre la superficie terrestre. Determinar el valor de la rapidez  $v_0$  paralela a la superficie para que el satélite tome:

- una órbita elíptica de altitud máxima igual a 8000 km.
- una órbita parabólica que lo saque del campo de atracción terrestre

a)  $r_p = (6.371 + 800) \cdot 10^3 \text{ m} = 7,17 \cdot 10^6 \text{ m}$        $GM = 3,98 \cdot 10^{14} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}}$   
 $r_A = (6.371 + 8000) \cdot 10^3 \text{ m} = 14,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Del problema (1.) se tiene  $v_p^2 = \frac{2GM}{r_A + r_p} \cdot \frac{r_p}{r_A}$

$$\therefore v_p = \left[ \frac{2 \cdot 3,98 \cdot 10^{14}}{(14,37 + 7,17) \cdot 10^6 \text{ m}} \cdot \frac{7,17 \cdot 10^6}{14,37 \cdot 10^6} \right]^{1/2} = 8.606 \text{ m/s}$$

b) Debe dársele la velocidad de escape correspondiente a la distancia

$r_p$ :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,98 \cdot 10^{14}}{7,17 \cdot 10^6}} = 10.536 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4. Se ha determinado que la rapidez máxima de un cierto satélite que orbita la tierra en una trayectoria elíptica de excentricidad  $e = 0,25$  y de  $25.700 \text{ km/h}$ .

Determinar: a) Distancias máxima y mínima a la superficie de la tierra durante su recorrido, expresadas en kilómetros. b) Su período orbital.

En una órbita elíptica, la velocidad máxima corresponde a la que alcanza el satélite al pasar por su perigeo.

De la ecuación de la trayectoria  $r = \frac{l_0^2/GM}{1+e \cos \theta}$ , la distancia  $r_p$

al perigeo se tiene para  $\theta = 0$ . Luego,  $r_p = \frac{l_0^2}{GM(1+e)}$

La constante  $l_0$  se puede expresar para ese punto:  $l_0 = r_p \cdot v_p$

$$\text{Luego, } r_p = \frac{r_p^3 v_p^2}{(1+e)GM} \rightarrow r_p = \frac{(1+e)GM}{v_p^2}$$

$$\therefore r_p = \frac{1,25 \cdot 3,98 \cdot 10^{14}}{(25.700/3,6)^2}$$

$$\therefore r_p = 9,762 \cdot 10^6 \text{ m} = \underline{9.762 \text{ km}}$$

$$\text{Además, de } e = \frac{r_A - r_p}{r_A + r_p} \rightarrow r_A = \frac{1+e}{1-e} r_p = \frac{1,25}{0,75} \cdot 9762 \text{ km}$$

$$\therefore \boxed{r_A = 16.270 \text{ km}}$$

$$\text{Así, } h_A = r_A - R_T = 16.270 - 6370 = 9.900 \text{ km}$$

$$h_p = r_p - R_T = 9.762 - 6.370 = 3.392 \text{ km}$$

$$\text{b) } a = \frac{1}{2}(r_A + r_p) = \frac{1}{2}(16.270 + 9.762) \rightarrow \boxed{a = 1,3 \cdot 10^7 \text{ m}} \text{ semieje mayor}$$

$$\therefore T = \left[ \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \right]^{1/2} = \left[ \frac{4\pi^2 \cdot (1,3 \cdot 10^7)^3}{3,98 \cdot 10^{14}} \right]^{1/2} = 14.762 \text{ s}$$

$$= 4,10 \text{ hs.}$$