

# GRAVITACIÓN.

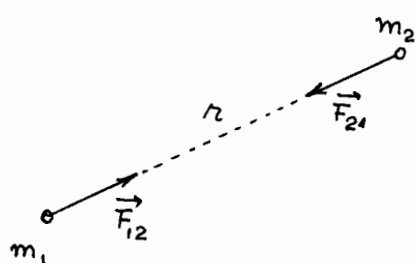
## Ley de la gravitación universal.

Newton en su obra "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural", publicada en 1687, enuncia la llamada Ley de Gravitación Universal:

"Cualquiera partícula en el universo atrae a cualquiera otra con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas"

De acuerdo con esto, si sus masas son  $m_1$  y  $m_2$  y la distancia  $r$ , la magnitud de las fuerzas con que se atraen es:

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$



Vetorialmente:

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (2)$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \quad (\text{tipo acción-reacción})$$

El signo (-) en (1) describe el carácter atractivo de la fuerza. La constante  $G$  de proporcionalidad es la constante de gravitación universal.

Estas fuerzas se ejercen sin importar el medio material que se interponga entre las partículas.

## Peso y fuerza gravitacional.

En su oportunidad hemos definido el peso de un cuerpo de masa  $m$  como la fuerza con que la tierra lo atrae. De esta forma, de la segunda ley de Newton se tiene que su peso  $P$  es

$$P = m g \quad (3)$$

donde  $g$  es la aceleración de gravedad local.

Ahora bien, esta misma fuerza peso, de acuerdo a la ley de gravitación universal queda expresada como:

$$P = G \frac{M m}{R^2} \quad (4)$$

donde  $M$  = masa de la tierra y  $R$  = radio de la tierra.

Iguando los segundos miembros de (3) y (4) :

$$\frac{G M m}{R^2} = m g \Rightarrow M = \frac{R^2 g}{G} \quad (5)$$

Se desprende de esta última ecuación que midiendo el valor de  $g$  en la superficie de la tierra y  $R$  de mediciones geodésicas, se presentaba la posibilidad de determinar la masa  $M$  de la tierra. sujeta a la posibilidad de llegar a determinar experimentalmente el valor de la constante universal  $G$ .

Esta medición fue realizada por primera vez por Cavendish en Cambridge, Inglaterra, en 1798, mediante un dispositivo experimental de su invención: la balanza de torsión.

Su valor es:

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (6)$$

cte. de gravitación universal

Con  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  y  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  se encuentra  $M_T = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

La densidad media de la tierra resulta así:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^3} \approx 5,50 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Este número resulta ser aproximadamente igual al doble del valor de la densidad de la mayoría de las rocas superficiales, de donde se concluye que el interior de la tierra debe tener una densidad mucho mayor.

### Variación de la aceleración de gravedad con la altura.

Considerando un cuerpo a una altura  $h$  sobre la superficie de la tierra, su distancia al centro de ella es ahora  $R+h$  y por lo tanto de

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = mg$$

se observa que  $g(h)$  y  $g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad (7)$

Para  $h=0$ ,  $g_0 = \frac{GM}{R^2}$

¿Qué error se comete al emplear el valor  $g_0$  en puntos a una altura  $h$ ?

Poniendo  $(R+h)^2 = R^2(1 + \frac{h}{R})^2$ , la ecuación (7) se transforma en

$$g(h) = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

La aproximación  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $|x| \ll 1$ , todo  $n$

aplicada a la ecuación anterior donde se cumple que  $h \ll R$

conduce a :

$$g(h) = \frac{GM}{R^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) \quad ; \quad h \ll R$$

Como  $\frac{GM}{R^2} = g_0$  , entonces

$$g(h) = \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) g_0 \quad (8)$$

Por lo tanto, el error cometido es

$$\begin{aligned} e\% &= \frac{g_0 - g(h)}{g_0} \cdot 100 \\ &= \frac{2h}{R} \cdot 100 \end{aligned}$$

Así, para  $h = 100 \text{ km} \rightarrow e \approx 3\%$

### Trabajo y energía potencial en gravitación.

Consideremos una masa puntual fija  $M$  ("masa fuente") y una partícula  $m$ . En cualquier punto del espacio en torno a  $M$  la partícula de masa  $m$  experimenta una fuerza atractiva gravitacional hacia  $M$  cuyo valor está dado por la ley de gravitación universal

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Así, a cada punto del espacio donde se ubique  $m$  corresponde una determinada fuerza. El conjunto de estas fuerzas constituye un "Campo de fuerzas" que convergen al centro de  $M$ . Se habla entonces de un "campo central de fuerzas"

El trabajo de las fuerzas de este campo sobre la partícula  $m$  cuando ésta se desplaza desde un punto  $\vec{r}_1$  hasta otro punto  $\vec{r}_2$  se calcula, por definición, según ecuación 13, pag. 63,

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

representa un trabajo correspondiente a un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$ .

Poniendo  $\vec{r} = r \hat{r} \rightarrow d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\hat{r}$

$$\begin{aligned} \therefore dW &= - \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\hat{r}) \\ &= - \frac{GMm}{r^2} (dr \hat{r} \cdot \hat{r} + r \hat{r} \cdot d\hat{r}) \end{aligned}$$

Ahora bien, de  $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \Rightarrow d\hat{r} \cdot \hat{r} + \hat{r} \cdot d\hat{r} = 0$

y como el producto escalar es conmutativo,  $2 d\hat{r} \cdot \hat{r} = 0$ , de modo que  $\hat{r} \cdot d\hat{r} = 0$ . Además,  $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

Así,

$$dW = - GMm \frac{dr}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad W &= - GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= - GMm \left[ \left( -\frac{1}{r_2} \right) - \left( -\frac{1}{r_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Se observa de inmediato que el trabajo depende solamente de los puntos del espacio entre los cuales se desplazó la partícula  $m$

y no del camino seguido entre ambos. Cuando el trabajo de una fuerza tiene estas características se dice que la fuerza es conservativa. La fuerza gravitacional es entonces una fuerza conservativa.

$$\text{Por lo tanto: } W = - \left[ \left( - \frac{GMm}{r_2} \right) - \left( - \frac{GMm}{r_1} \right) \right] \quad (9)$$

se define la función escalar de posición:

$$\boxed{U = - \frac{GMm}{r}} \quad (10)$$

o función energía potencial de la partícula en el campo gravitacional de  $M$ .

La función potencial o energía potencial por unidad de masa es

$$V = - \frac{GM}{r} \quad (11)$$

de modo que:  $U = mV$

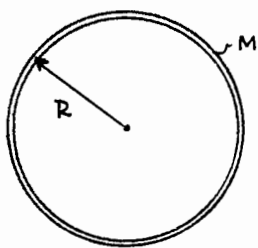
Finalmente, de (9) y (10) se tiene que

$$\boxed{W = - \Delta U} \quad (12) \quad \text{o} \quad W = - m \Delta V.$$

### Campo gravitacional y energía potencial gravitacional de una cáscara esférica de radio $R$ .

Sea una cáscara de masa  $M$  y radio  $R$  fija.

Se demuestra mediante técnicas del cálculo integral que en las regiones exterior e interior de la cáscara los valores del campo gravitacional y de la energía potencial asociada son:

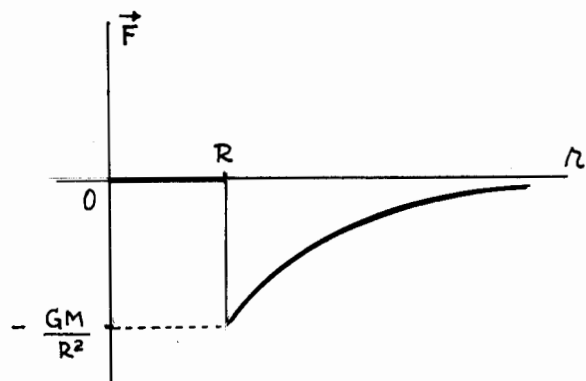


$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad r > R \quad (13)$$

$$\vec{F} = \vec{0} \quad r < R \quad (14)$$

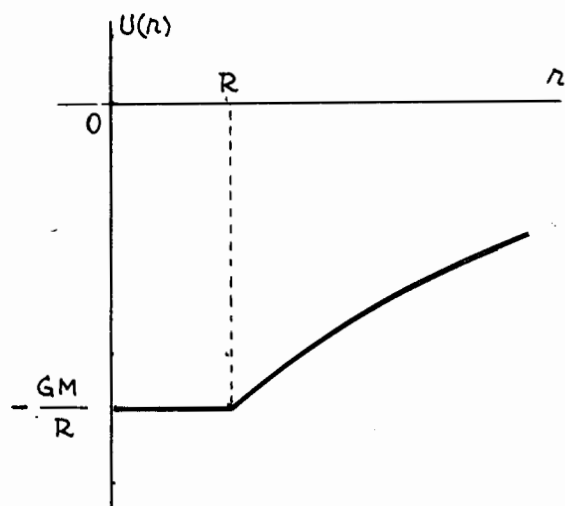
$$U = - \frac{GMm}{r} \quad r > R \quad (15)$$

$$U = - \frac{GMm}{R} \quad r < R \quad (16)$$



En el interior de la cáscara la fuerza sobre la partícula  $m$  es nula.

En el exterior decrece con  $\frac{1}{r^2}$



En el interior de la cáscara la energía potencial de la masa  $m$  es constante, igual a  $-\frac{GM}{R}$

En el exterior decrece con  $\frac{1}{r}$

### Campo gravitacional y energía potencial gravitacional de una esfera maciza.

Si observamos que el campo de fuerzas de una cáscara esférica

para una masa  $m$  en su exterior es  $\vec{F} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$  nos damos cuenta que es idéntico al que corresponde a una masa  $M$  concentrada en el centro de la cáscara. De este modo, imaginando la esfera maciza como una compuesta de cáscaras esféricas sucesivas, cada una de ellas contribuye al campo en un punto exterior como si sus masas se encontraran concentradas en el centro común, que es precisamente el de la esfera maciza. Por lo tanto,

$$\vec{F}(r) = -\frac{Gm}{r^2} \sum M_i = -\frac{GMm}{r^2} \quad \text{donde } \sum M_i = M \quad (17)$$

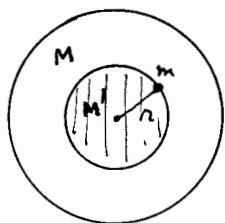
Análogamente,

$$U(r) = -\frac{Gm}{r} \sum M_i = -\frac{GMm}{r} \quad (18)$$

Para  $r < R$ , consideremos un punto  $P$  interior a la distancia  $r$  del centro y una superficie esférica de radio  $r$ . Entonces, todas las cáscaras con radios mayores que  $r$  y hasta  $r = R$ , no contribuyen al campo en  $P$ . Sólo contribuyen las interiores.

Así,

$$\vec{F}(r) = -\frac{GM'm}{r^2} \hat{r} \quad \text{donde } M' = \text{masa esfera radio } r.$$



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'} \rightarrow M' = \frac{V'}{V} M = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M$$

$$\therefore M' = \frac{r^3}{R^3} M$$

$$\text{De este modo, } \vec{F} = -\frac{GM}{R^3} r \hat{r} \quad (r < R) \quad (19)$$

La fuerza varía linealmente con su distancia al centro.

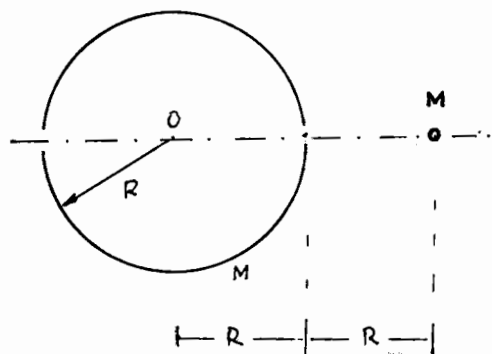
Finalmente, sin demostración,

$$U = \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \quad (r < R) \quad (20)$$



## Problemas ilustrativos

1. Una cáscara esférica de masa  $M$  y radio  $R$  tiene dos perforaciones diametralmente opuestas. Sobre la línea de estas perforaciones y a la distancia  $2R$  de su centro se ubica una partícula de masa  $M$  (igual a la de la cáscara). El sistema descrito se encuentra inicialmente



en reposo. La mutua atracción gravitacional entre estos cuerpos hace que ellos se aproximen al dejarlos en libertad.

Calcular el tiempo transcurrido entre los instantes de entrada y salida de la partícula de la cáscara esférica

Las masas de ambos cuerpos son iguales, al igual que las magnitudes de las fuerzas atractivas que actúan sobre ellos. El centro de masa del sistema, situado en el punto medio de  $OM$ , permanece en reposo durante el movimiento de aproximación de las componentes del sistema (No hay fuerzas exteriores).

El sistema es conservativo, lo que permite calcular fácilmente el valor de la rapidez  $v$  correspondiente al instante en que la partícula penetra en la cáscara.

Inicialmente, en el reposo:  $E_1 = -\frac{GMM}{2R}$

Al llegar a la perforación de entrada:  $E_2 = -\frac{GMM}{R} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} M v^2\right)$

ya que ambos cuerpos tienen igual rapidez  $v$  en dicho instante, habiendo recorrido iguales distancias  $R/2$  en sentidos opuestos.

De  $E_1 = E_2$ :  $-\frac{GM^2}{2R} = -\frac{GM^2}{R} + M v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}}$

Una vez dentro de la cáscara, la fuerza sobre la partícula es nula y por lo tanto la fuerza sobre la cáscara también es nula, de modo que

ambos cuerpos se mueven en sentidos opuestos y con velocidades constantes de igual valor  $v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$ .

Para calcular el tiempo que tarda la partícula  $M$  en cruzar la cáscara resulta conveniente valerse de su velocidad relativa respecto a ésta:

$$v_{rel} = v - (-v) = 2v.$$

Esto equivale a considerar la cáscara en reposo y la partícula desplazándose dentro de ella con rapidez  $2v$ .

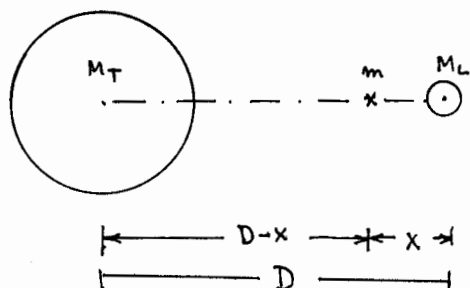
Así, 
$$t = \frac{2R}{v_{rel}} = \frac{2R}{2v} \rightarrow \boxed{t = R \sqrt{\frac{2R}{GM}}}$$

2. Existe un punto en la línea que une los centros de la tierra y la luna en el cual la suma de las fuerzas gravitacionales es nula

- Encontrar la posición de ese punto
- Calcular la velocidad con que debería lanzarse un cuerpo para que llegara a dicho punto con velocidad nula.
- Si se le da al cuerpo una velocidad ligeramente superior a la determinada en b), calcular la velocidad con que llegará a la superficie de la luna.

$G$  = cte. de gravitación universal;  $M_T$ : masa de la tierra;  $M_L$ : masa de la luna.

$D$ : distancia tierra - luna;  $x$ : distancia del punto buscado al centro de la luna.



Sea  $m$  una masa de prueba.

$$a) \frac{G M_T m}{(D-x)^2} = \frac{G M_L m}{x^2} \Rightarrow \frac{M_T}{M_L} = \left( \frac{D-x}{x} \right)^2 = \left( \frac{D}{x} - 1 \right)^2$$

Luego,  $\frac{D}{x} = 1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} \rightarrow \boxed{X = \frac{D}{1 + \sqrt{M_T/M_L}}}$

b) El campo es conservativo.

La energía  $E_1$  al lanzar el cuerpo desde la superficie de la tierra:

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{R_T} - \frac{G M_L m}{D-R_T}$$

La energía  $E_2$  en el punto a la distancia  $(D-x)$  de la tierra:

$$E_2 = - \frac{G M_T m}{D-x} - \frac{G M_L m}{x} + 0 \quad (\text{llega con velocidad nula por hipótesis})$$

$$\therefore E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{R_T} - \frac{G M_L m}{D-R_T} = - \frac{G M_T m}{D-x} - \frac{G M_L m}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = 2 G M_T \left[ \frac{1}{R_T} - \frac{1}{D-x} \right] + 2 G M_L \left[ \frac{1}{D-R_T} - \frac{1}{x} \right].}$$

c) En el punto a la distancia  $(D-x)$  de la tierra:

$$E(D-x) = - \frac{G M_T m}{D-x} - \frac{G M_L m}{x}$$

En la superficie de la luna:  $E(R_L) = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{G M_T m}{D-R_L} - \frac{G M_L m}{R_L}$

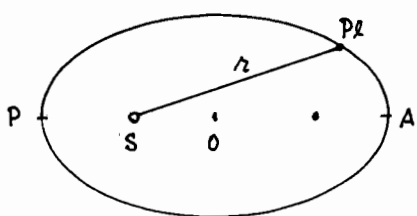
$$\therefore \boxed{v'^2 = 2 G M_T \left[ \frac{1}{D-R_L} - \frac{1}{D-x} \right] + 2 G M_L \left[ \frac{1}{R_L} - \frac{1}{x} \right]}$$

## Movimiento planetario. Leyes de Kepler.

En 1543 (Valdivia funda Santiago en 1541), Nicolás Copérnico propone el sistema planetario heliocéntrico: la tierra junto a los demás planetas entonces conocidos se encontrarían girando en torno al sol en órbitas circulares.

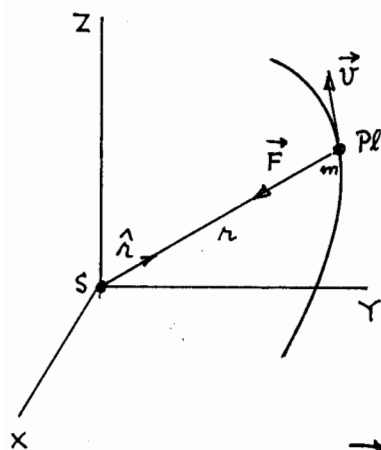
Tycho Brahe realiza mediciones muy precisas de las posiciones de los planetas durante más de veinte años de las que se vale Johannes Kepler para elaborar un modelo matemático de este movimiento, que quedan plasmadas en sus tres famosas leyes del movimiento planetario:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.
2. El radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales ("Ley de las áreas").
3. El cuadrado del período orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse.



P: Perihelio    Punto más cercano al sol  
A: Afelio    Punto más lejano al sol

Cien años más tarde Newton deduce estas leyes empíricas a partir de su Ley de Gravitación Universal.



Para toda posición del planeta P la fuerza gravitacional  $\vec{F}$  apunta siempre en dirección al sol, en el origen del sistema inercial de coordenadas.

El momento  $\vec{M}_O$  de esta fuerza con respecto al origen O es evidentemente nulo:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= r \hat{r} \times \left( -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \right) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

De la ecuación rotacional  $\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$  se concluye entonces que el momentum angular  $\vec{L}_O$  es una constante del movimiento:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{c}} \quad (21)$$

Esto implica que tanto la magnitud como la dirección del vector momentum angular permanecen constantes.

Como  $\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

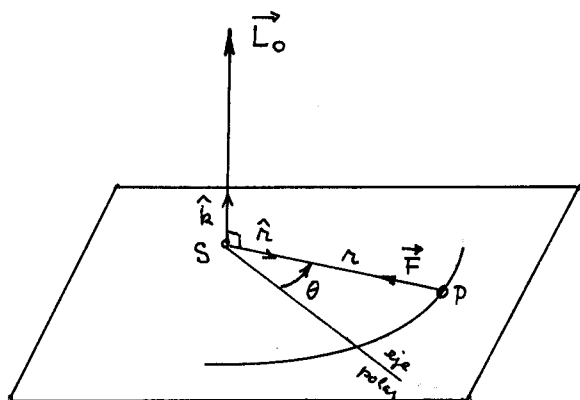
si multiplicamos escalarmente esta ecuación por el vector posición  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \cdot \vec{L}_O = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times m\vec{v})$$

El segundo miembro es nulo, puesto que el vector  $\vec{r} \times m\vec{v}$ , por definición de producto vectorial, es perpendicular tanto a  $m\vec{v}$  como a  $\vec{r}$ .

Luego,  $\vec{r} \cdot \vec{L}_O = 0$  para todo  $t$ .

Esta última ecuación representa vectorialmente un plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector constante  $\vec{L}_0$ , lo que pone de manifiesto que las trayectorias de los planetas en torno al sol son trayectorias planas. Por lo tanto, en todos los cálculos relacionados con las órbitas planas de los planetas resultará conveniente adoptar un sistema de coordenadas polares.



Las ecuaciones escalares de movimiento en estas coordenadas conducen a establecer que las órbitas posibles son curvas conocidas como secciones cónicas: elipses, circunferencias, parábolas o hipérbolas, dependiendo de las condiciones iniciales impartidas a la masa móvil. En el caso de los planetas se trata de elipses que son curvas cerradas.

Expresemos el momentum angular  $\vec{L}_0$  anterior en coordenadas polares. Recordemos que la velocidad  $\vec{v}$  en estas coordenadas tiene la forma:

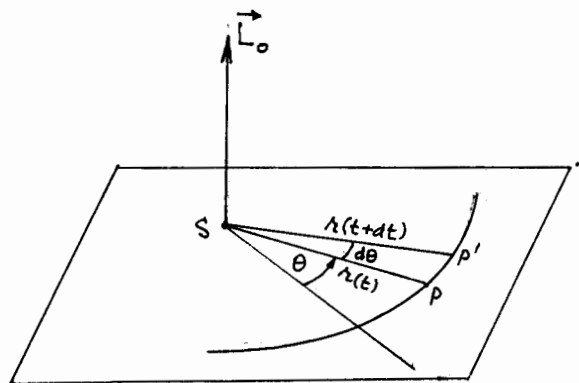
$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad \text{donde } \dot{\theta} = \omega$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ &= r \hat{r} \times m (r \dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \hat{k} \end{aligned}$$

Así,  $\vec{L}_0 = m r^2 \omega \hat{k} \quad ; \quad L_0 = m r^2 \omega \quad (22)$

Ley de las áreas:



Consideremos dos posiciones infinitesimalmente próximas de un planeta sobre su trayectoria elíptica, correspondientes a instantes  $t$  y  $t+dt$ .

El "área barrida" por el radio vector en el intervalo  $dt$  de tiempo resulta igual al área del "triángulo"  $SPP'$ :

$$dA \cong \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

de modo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Pero, de lo visto anteriormente,  $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ , ya que  $m = \text{cte}$  y  $\vec{L}_0 = \text{cte}$ .

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L_0}{m} = l_0 = \text{cte.} \quad l_0 = \text{momentum angular por unidad de masa.}$$

por lo que  $\boxed{\frac{dA}{dt} = \text{cte} = \frac{1}{2} l_0} \quad (23)$

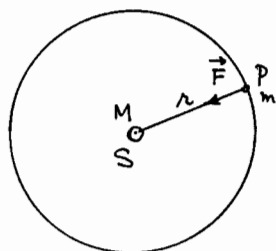
$\frac{dA}{dt}$  recibe el nombre de velocidad areolar.

De (23),  $dA = cte \cdot dt$

de donde se obtiene integrando:  $A(t) = cte \cdot t$  es decir, el área barrida es función lineal del tiempo y por lo tanto las áreas barridas en tiempos iguales son iguales, lo que no es otra cosa que la ley de las áreas de Kepler.

### Tercera ley de Kepler

Para simplificar el tratamiento consideremos una órbita circular:



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{F}_c = -m \frac{v^2}{r} \hat{r}$$

$$\therefore \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (24)$$

Llamando  $T$  al período o tiempo empleado por el planeta en recorrer su órbita, la velocidad  $v$  se expresa como:

$$v = \omega r$$

$$\text{y como } \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} r$$

Reemplazando en (24):

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte} \quad (25)$$

El mismo cálculo pero empleando una trayectoria elíptica da por resultado

$$\boxed{\frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2}{GM}} \quad (26)$$

donde "a" es el semieje mayor de la elipse

Estas expresiones corresponden a la tercera ley de Kepler.



Para dos planetas de períodos  $T_1$  y  $T_2$  y semiejes  $a_1$  y  $a_2$  se cumple, de acuerdo a lo anterior:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Ejercicio: Calcular la masa del sol sabiendo que el período orbital de la tierra es  $T = 3,156 \times 10^7$  s y su distancia media al sol es  $a = 1,496 \times 10^{11}$  m.

De la tercera ley:  $\frac{T^3}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \rightarrow M_S = \frac{4\pi^2}{GT^2} a^3$

$$\therefore M_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (365,24 \cdot 3600 \text{ s})^2} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

O sea, alrededor de 333.000 veces la masa de la tierra.

### Consideraciones energéticas relacionadas con el movimiento de satélites y planetas.

Consideremos un cuerpo de masa  $m$  que se mueve en las inmediaciones de un cuerpo masivo  $M$ , con  $M \gg m$ . Suponiendo entonces  $M$  en reposo respecto de un sistema inercial de referencia, la energía del sistema será igual a la suma de la energía cinética de la masa  $m$  más la energía potencial del sistema:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (27)$$

Si el sistema puede considerarse como aislado, la energía total  $E$  es constante y por lo tanto, para dos puntos a las distancias  $r_1$  y  $r_2$  del centro de  $M$ :

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Para calcular la velocidad inicial que habría que impartirle a un cuerpo para que escapara de la atracción terrestre, alejándose indefinidamente, haciendo  $r_1 = R$ ,  $M = M_T$  y  $r_2 \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_T m}{R} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Como  $\frac{1}{2} m v_2^2 > 0$ , entonces  $\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_T m}{R} \geq 0$

La igualdad corresponde al caso en que  $v_2 = 0$  en  $r_2 \rightarrow \infty$ .

Así, se encuentra que la velocidad debe ser

$$v_1 \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

A la menor velocidad se le denomina "velocidad de escape  $v_e$ ":

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}} \quad (28)$$

Para la tierra:  $v_e = 11,2 \text{ km/s}$

Para la luna:  $v_e = 2,3 \text{ km/s}$

Se observa que esta velocidad es independiente de la masa del objeto lanzado y de la dirección de su lanzamiento. Un vehículo espacial (una sonda, por ejemplo) tiene la misma velocidad de escape que una molécula.

La velocidad cuadrática media de las moléculas en el aire es del orden de  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta;  $k$  una constante universal conocida como la constante de Boltzmann y  $m$  la masa de una molécula.

Para los distintos gases que componen la atmósfera, a la temperatura ambiente, las velocidades cuadráticas medias son en general menores que la de escape. De entre ellas, las con mayores probabilidades de

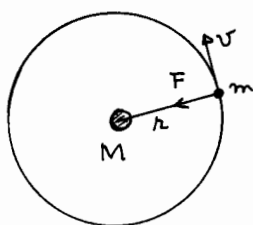
alcanzar velocidades del orden o mayores que la de escape son las más livianas, ésto es, las de hidrógeno. Se estima que escapan a razón de  $1,3 \times 10^{22}$  molec./s, lo que hace un total aproximado de 600 kg/año.

Examinando la ecuación (27)  $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$  se

observa que la energía  $E$  del sistema puede ser positiva, negativa o nula, dependiendo del valor de la velocidad  $v$  que se de a la masa  $m$ .

Un satélite que gira en torno a un planeta de masa  $M$ , por ejemplo, es un sistema ligado: permanece en órbita cerrada.

Supongamos una órbita circular:



$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{F}_c = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}$$

$$\therefore G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

Substituyendo el valor de  $\frac{1}{2}mv^2$  en la ecuación (27) se obtiene:

$$E = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r}$$

o sea, 
$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

Tenemos entonces que en el caso de sistemas ligados (órbitas circulares y órbitas elípticas), la energía mecánica total es negativa.

Si  $E = 0$  la trayectoria es parabólica

Si  $E > 0$  " " " hiperbólica.

## Satélite geostacionario.

Consiste en un satélite en órbita en torno a la tierra de modo que se encuentre permanentemente sobre un mismo lugar geográfico. Necesariamente entonces debe tratarse de una órbita circular equatorial y donde el satélite la recorra en igual sentido que el de rotación de la tierra y con idéntica velocidad angular.

El satélite debe dar una vuelta en torno a la tierra en 24 horas.

Se tiene:  $v^2 = \frac{GM}{r}$  donde  $M$  es la masa de la tierra.

Además, si el satélite ha de tener una determinada velocidad angular  $\omega$ , su velocidad lineal deberá ser

$$v = r\omega$$

$$\text{De este modo, } v^2 = r^2\omega^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

$$\text{Pero, } \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\therefore r = \left[ \frac{GM (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3}$$

Reemplazando  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  y  $M_T = 5,96 \cdot 10^{24} \text{kg}$ .

$$\text{se obtiene } \boxed{r = 42.255 \text{ km}}$$

y la altura sobre la superficie de la tierra:

$$h = 42.255 - 6370 = \underline{\underline{36.000 \text{ km}}}$$

## - Trayectorias en un campo gravitacional.

Hemos afirmado anteriormente que de las ecuaciones de movimiento de una masa  $m$  que se mueve en el campo gravitacional de una masa fuente  $M \gg m$  se desprende que las trayectorias posibles, dependiendo de las condiciones iniciales, son curvas conocidas como secciones cónicas. Su deducción requiere de una cierta familiaridad con las técnicas del análisis diferencial e integral de modo que nos limitaremos aquí a establecer que son del tipo:

$$r = \frac{l_0^2 / GM}{1 + e \cos \theta}$$

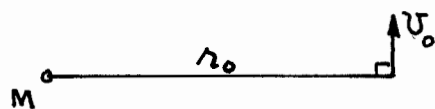
donde  $l_0$  es una constante del movimiento, el momentum angular por unidad de masa de la partícula  $m$ .

La constante  $e$  es la llamada excentricidad de la cónica y de su valor depende su forma.

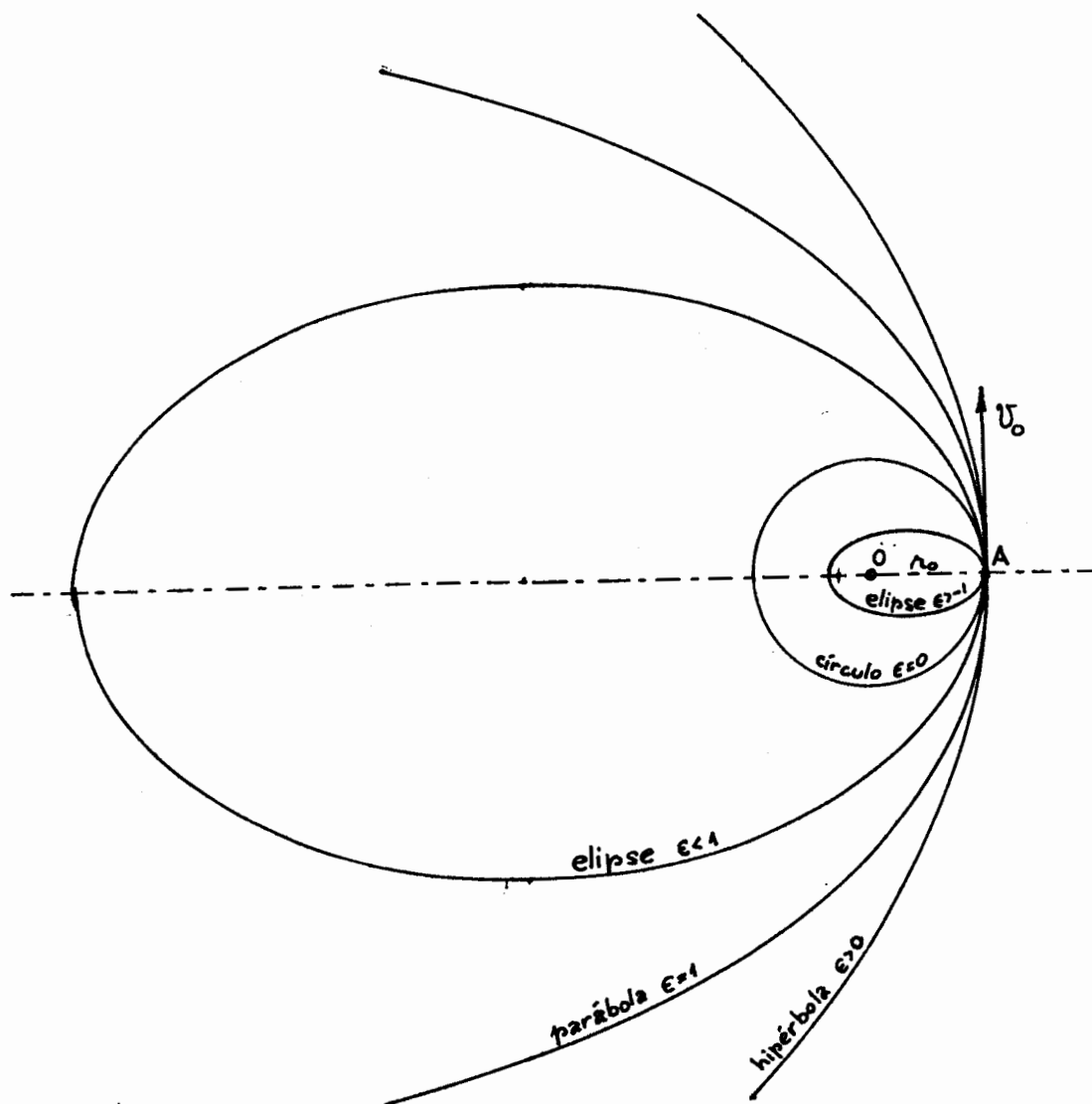
Así, para

$e=0$	se trata de una circunferencia.
$e<1$	" " " " elipse
$e=1$	" " " " parábola
$e>1$	" " " " hipérbola

Un cierto tipo de lanzamiento consiste en llevar la masa  $m$  hasta una distancia  $r_0$  e imprimirle allí una rapidez  $v_0$  perpendicularmente al radio vector  $r_0$  (lanzamiento perigeo):



De acuerdo con el valor de  $v_0$  se pueden lograr los distintos tipos de trayectoria:  $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$



- a)  $-1 < e < 0 \rightarrow 0 < v_0 < \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$  elipse con su foco izquierdo en el polo de atracción
- b)  $e=0 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$  circunferencia de radio  $r_0$
- c)  $0 < e < 1 \rightarrow \sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$  elipse con su foco derecho en el polo de atracción
- d)  $e=1 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$  parábola (curva abierta)
- e)  $e > 1 \rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$  hipérbola (2 ramas abiertas)

Las dos constantes del movimiento son:

$$l_0 = r_0 v_0 \quad \text{y} \quad E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

$$\text{o} \quad L_0 = m r_0 v_0$$