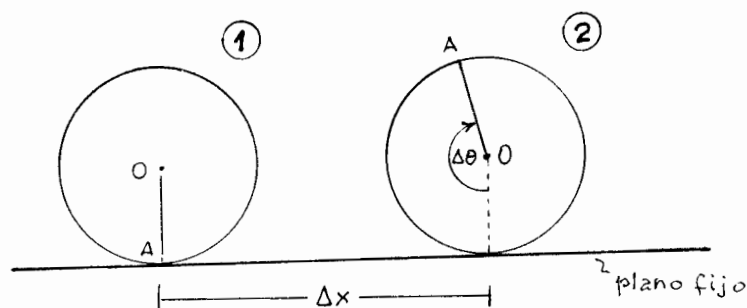


## 2. Rotación de un sólido en torno a un eje en translación paralela.

Rodadura de un sólido sobre una superficie



El disco de la figura "rueda sin resbalar" sobre la superficie fija.

Esta importante condición cinemática implica el hecho que el punto A del borde del disco en contacto instantáneo con un punto del plano fijo no se desplaza, por lo que su velocidad instantánea es nula.

Esta misma situación se producirá sucesivamente para los demás puntos del borde cuando se encuentren en contacto con el plano.

Al pasar de la posición ① a la posición ② en  $\Delta t$  segundos, el centro O del disco se ha desplazado entonces en  $\Delta x$  y el radio OA ha girado en  $\Delta \theta$  respecto de su posición original. Resulta entonces que la condición cinemática de rodar sin resbalar se expresa mediante la ecuación:

$$\boxed{\Delta x = R \Delta \theta} \quad (22)$$

Dividiendo por el tiempo empleado  $\Delta t$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = R \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\text{o} \quad \frac{dx}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

Pero,  $\frac{dx}{dt} = v_O$  (velocidad del centro O), y  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  (velocidad angular del disco)

de modo que se obtiene también como condición cinemática de rodar sin resbalar :

$$\boxed{v_o = R\omega} \quad (23)$$

y en igual forma, a partir de aquí, ya que  $\frac{dv_o}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$ , que :

$$\boxed{a_o = R\alpha} \quad (24)$$

Las ecuaciones enmarcadas corresponden a relaciones entre cantidades lineales y rotacionales, que se cumplen cuando hay rodadura sin deslizamiento : son las condiciones cinemáticas de "rodar sin resbalar".

Energía cinética. El segundo teorema de König (Ec 16 pág. 119), respecto de un sistema de partículas establece que la energía cinética del sistema puede expresarse como la suma de la energía cinética de su centro de masa más la energía cinética de rotación del sistema respecto de su centro de masa:

$$K = \frac{1}{2} M V_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{p}_i^2$$

donde  $M$  es la masa total del sistema ( $\sum m_i$ ), considerada como concentrada en el centro de masa.

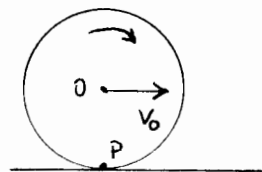
En el caso de nuestro disco que rueda sin resbalar :

$$K = \frac{1}{2} M v_o^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad (25)$$

donde  $\frac{1}{2} I \omega^2$  es la energía cinética de rotación del disco relativa a su eje de simetría.

Como  $V_o = R\omega$  y  $I_o = \frac{1}{2}MR^2$

$$K = \frac{1}{2}(I_o + MR^2)\omega^2$$



Pero,  $I_o + MR^2 = I_p$  según teo. de Steiner

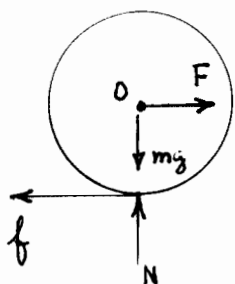
donde  $I_p$  es el momento de inercia del disco respecto de un eje por el punto instantáneo P de contacto con el plano fijo.

$$\therefore \boxed{K = \frac{1}{2}I_p\omega^2} \quad (26)$$

Notar que  $\omega$  es exactamente el mismo, independientemente del eje que se elija.

Como  $V_p = 0$  (disco rueda sin resbalar), la ecuación (26) tiene idéntica forma que la correspondiente a un cuerpo que rota en torno a un eje fijo, lo que sugiere que en todo instante (y siempre que no haya resbalamiento), puede considerarse al disco como rotando instantáneamente en torno a un eje por el punto de contacto P. A este punto se le denomina como "centro instantáneo de rotación" (C.I.R.) y al eje correspondiente como eje instantáneo de rotación.

a) Examinemos el caso de un disco que rueda sin resbalar tirado por una fuerza  $F$  horizontal aplicada en su centro.



$$\begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} (1) F - f = m a_{ox} \\ (2) N - mg = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Movimiento} \\ \text{del C. de masa O.} \end{array} \\ \text{E}_o: \quad (3) f \cdot R = I_o \alpha \quad \text{Ecuación rotacional} \\ (4) a_{ox} = R \alpha \quad \text{En cinemática.} \end{array}$$

Tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas:  $f$ ,  $a_{ox}$ ,  $N$  y  $\alpha$ .

Eliminando la aceleración angular  $\alpha$  entre las ecuaciones (3) y (4):

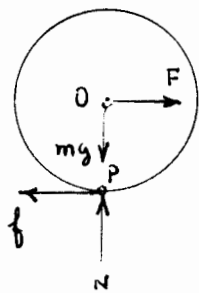
$$\alpha = \frac{a_{ox}}{R} \rightarrow f \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{a_{ox}}{R} \rightarrow f = \frac{1}{2} m a_{ox}$$

Reemplazando luego  $f$  en (1)  $\rightarrow \boxed{a_{ox} = \frac{2}{3} \frac{F}{m}} \quad (5)$

Luego,  $\boxed{f = \frac{F}{3}} \quad (6) \quad \text{y} \quad \boxed{\alpha = \frac{a_{ox}}{R} = \frac{2}{3} \frac{F}{mR}} \quad (7)$

De (6) se observa que  $f$  tiene el sentido que se le atribuyó en el D.C.L., un signo (-) habría indicado que el sentido sería el opuesto.

b) Si optamos por la ecuación rotacional alternativa, esto es, tomando el centro instantáneo de rotación P:



$$\underbrace{F \cdot R}_{\tau_P} = I_P \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora, } I_P &= I_O + m R^2 \\ &= \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 \\ &= \frac{3}{2} m R^2 \end{aligned}$$

De este modo,  $\boxed{\alpha = \frac{2}{3} \frac{F}{mR}} \quad \text{y} \quad \boxed{a_{ox} = R\alpha = \frac{2}{3} \frac{F}{m}}$

Se observa que en este caso se obtienen directamente los valores de  $\alpha$  y  $a_{ox}$  lo que es lógico, pues se trata de una rotación pura instantánea en torno de P.

El valor de  $f$  se calcularía de la ecuación (1).

c) Finalmente, como la fuerza de roce está aplicada instantáneamente sobre el punto del disco en contacto con el plano y este punto no resbala, la fuerza  $f$  "no trabaja" (su trabajo es nulo).

Por su parte, la fuerza  $N$  se mantiene perpendicular al desplazamiento y por lo tanto su trabajo es igualmente nulo. Sólo trabaja la fuerza  $F$ . Invocando entonces el teorema del trabajo-energía cinética, suponiendo que el sistema parte del reposo, el trabajo de la fuerza en un desplazamiento arbitrario  $x$  será:

$$\begin{aligned} F \cdot x &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \frac{v_0^2}{R^2} \\ &= \frac{3}{4} m v_0^2 \end{aligned}$$

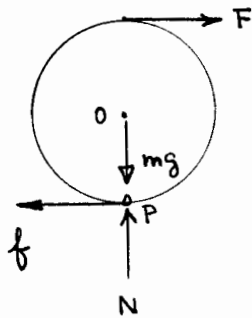
$$\therefore x = \frac{3m}{4F} v_0^2$$

Entonces, derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3m}{4F} \cdot 2 v_0 \frac{dv_0}{dt}$$

$$\text{Como } \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{y} \quad \frac{dv_0}{dt} = a_{0x} \quad \rightarrow \quad a_{0x} = \frac{2F}{3m}$$

A continuación, examinemos el mismo problema pero con la fuerza  $F$  aplicada como se indica en la figura. Esta situación se puede obtener mediante un hilo de masa despreciable enrollado en una garganta en el disco.



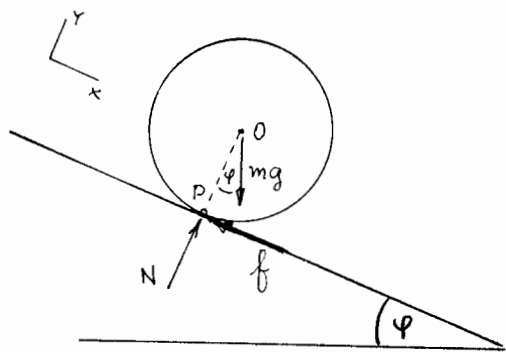
Obtenemos de inmediato la aceleración  $a_{0x} = R\alpha$  mediante la ecuación rotacional.  $\tau_P = I_P \alpha$

$$\therefore F \cdot 2R = \frac{3}{2} m R^2 \alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{R\alpha = a_{0x} = \frac{4}{3} \frac{F}{m}}$$

$$\text{Luego, de la ecuación } F - f = m a_{0x} \quad \rightarrow \quad \boxed{f = -\frac{F}{3}}$$

Se observa que el signo  $(-)$  indica que el sentido de  $f$  es el opuesto al de la figura!

- # Examinemos a continuación el caso de una esfera de masa  $m$  y radio  $b$  que baja rodando sin resbalar por un plano inclinado de ángulo  $\varphi$ .  
 $I_O = \frac{2}{5} m b^2$ . a) Calcular  $\alpha$ ,  $a_O$ ,  $f$ . b) Calcular la velocidad de su centro de masa al desplazarse una distancia  $x$  habiendo partido del reposo.



a) Para el movimiento del centro de masa escogemos un sistema fijo  $x$ - $y$  de referencia como se indica en la figura. De acuerdo con esto, las ecuaciones son:

$$x: mg \sin \varphi - f = m a_x \quad (1)$$

$$y: N - mg \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$I_P = \frac{2}{5} m b^2 + m b^2 = \frac{7}{5} m b^2 \rightarrow (P): mg \sin \varphi \cdot b = \frac{7}{5} m b^2 \alpha \quad (3)$$

$$a_x = b \alpha \quad (4)$$

$$\text{De (3): } \boxed{\alpha = \frac{5 \sin \varphi}{7 b} g} \quad (7) \quad \therefore \boxed{a_x = \frac{5}{7} g \sin \varphi} \quad (8)$$

$$\text{De (1) y (8): } \boxed{f = \frac{2}{7} m g \sin \varphi}$$

Se ha privilegiado la ecuación rotacional referida al centro instantáneo de rotación  $P$  ya que permite obtener los resultados más directamente.

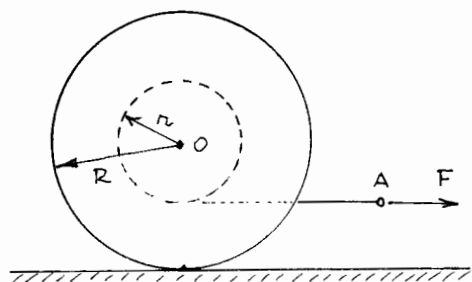
- b) Aprovechando que el centro de masa se mueve con aceleración constante, dada por (8), calculamos  $v$  de la conocida ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:  $v_2^2 - v_1^2 = 2 a x$ . En nuestro caso,  $v_1 = 0$ .

$$\therefore v^2 = 2 \cdot \frac{5}{7} g \sin \varphi \cdot x \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} g \sin \varphi \cdot x}}$$

Como el sistema es conservativo, la conservación de la energía mecánica nos conduciría directamente al valor de  $v$ .

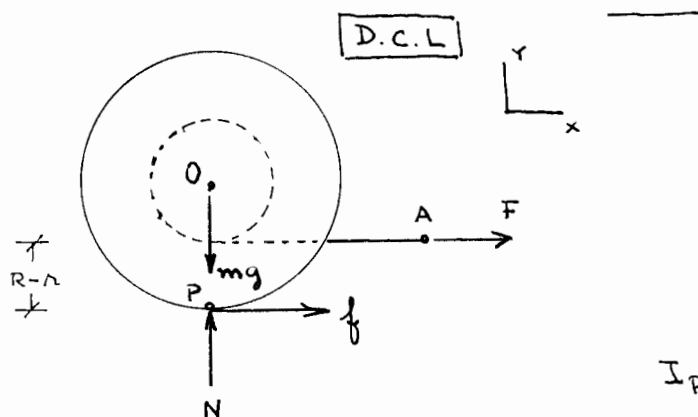
# Problemas ilustrativos.

1.



un carrete de masa  $m$  y radios  $R$  y  $r$ , tiene un momento de inercia  $I_0$  relativo a su eje de simetría. Se aplica una fuerza horizontal constante  $F$  mediante un hilo ideal enrollado en su cilindro interior. Si la rugosidad del plano fijo horizontal sobre el cual se apoya el carrete es suficiente como para que no haya deslizamiento, calcular:

- aceleración  $a_0$  de su centro  $O$ .
- aceleración angular  $\alpha$  del carrete
- valor de la fuerza de roce estático  $f$
- valor del coeficiente de roce estático mínimo  $\mu$  para que no haya deslizamiento.
- aceleración del tramo de cuerda horizontal



El sentido de  $f$  lo hemos elegido en forma arbitraria.

La ecuación rotacional la plantearemos relativa al centro instantáneo de rotación  $P$ . El momento de inercia

$$I_P = I_0 + mR^2 \quad \text{y} \quad \tau_P = I_P \alpha$$

$$\text{Así,} \quad F(R-r) = (I_0 + mR^2) \alpha \quad (1)$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{F(R-r)}{I_0 + mR^2} \quad (b)$$

$$a_0 = \frac{F(R-r) \cdot R}{I_0 + mR^2} \quad (c)$$

Las ecuaciones escalares del movimiento del centro de masa  $O$  son:

$$x: \quad F + f = m a_0 \quad (2)$$

$$y: \quad N - mg = 0 \quad (3)$$

De (2) y (a) :

$$f = - \left[ \frac{I_0 + m R r}{I_0 + m R^2} \right] F \quad (c)$$

De  $f_e \leq \mu N$  se tiene que  $\mu_{\min} = \frac{f_e}{N}$  y como  $N = mg$  según (3) :

$$\mu_{\min} = \frac{F}{mg} \left[ \frac{I_0 + m R r}{I_0 + m R^2} \right] \quad (d)$$

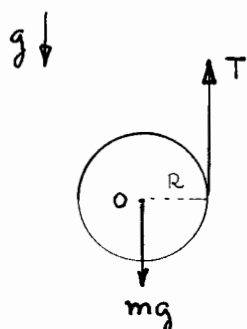
e) El carrete se mueve en el mismo sentido de la fuerza  $F$ , ésto es, el hilo se va enrollando en el disco central a medida que avanza. Así, un desplazamiento  $x$  del eje central del carrete equivale a una rotación en un ángulo  $\theta$  en torno a ese eje, tal que  $x = R\theta$ . El hilo se ha enrollado en una longitud  $r\theta$ , de modo que el desplazamiento de un punto cualquiera del trozo horizontal de la cuerda es igual a

$$x_A = x - r\theta \rightarrow x_A = (R - r)\theta$$

de donde se tiene finalmente que  $a_A = (R - r)\alpha$

$$\therefore a_A = \frac{F(R - r)^2}{I_0 + m R^2} \quad (e)$$

2. Suponiendo que el hilo de un yo-yo se mantenga vertical durante el descenso calcular : a) aceleración de su centro de masa. b) Aceleración angular del yo-yo. c) Tensión  $T$  de la cuerda.



$$mg = T = m a_0 \quad (1)$$

$$T \cdot r = I_0 \alpha \quad (2)$$

$$a_0 = R \alpha \quad (3)$$

Se ha simplificado el yo-yo suponiendo que el hilo está enrollado en una canal en el borde.



De (2):  $T/R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_0}{R}$  (4)

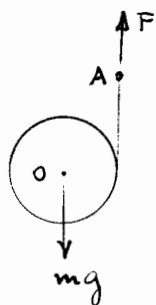
Luego, de (4) y (1):  $mg - \frac{1}{2} m a_0 = m a_0 \rightarrow \boxed{a_0 = \frac{2}{3} g}$  y  $\boxed{\alpha = \frac{2g}{3R}}$

Finalmente, de (4):  $T = \frac{1}{2} m \cdot \frac{2}{3} g \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{3} mg}$

Si se desea calcular la velocidad  $v$  del centro de masa al descender en una cantidad  $h$ , habiendo partido del reposo podemos, alternativamente o emplear la conservación de la energía o valer nos del hecho que  $a_0 = \frac{2}{3} g = \text{cte.}$

Empleando esto último,  $v^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} g \cdot h \rightarrow \boxed{v = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}}}$

3. Calcular la aceleración con que debería subirse la cuerda para que el yo-yo se desenrolle en el mismo lugar (sin descender).



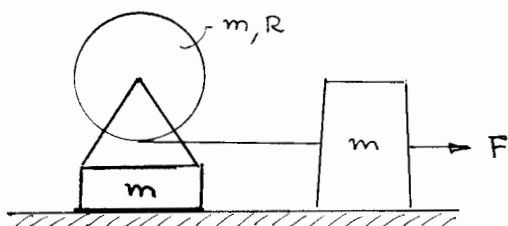
$$F - mg = 0 \rightarrow F = mg$$

Además:

$$F \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2F}{mR} = \frac{2mg}{mR}$$

$$\therefore \boxed{\alpha = \frac{2g}{R}} \quad \therefore \boxed{a_A = R\alpha = 2g}$$

4.

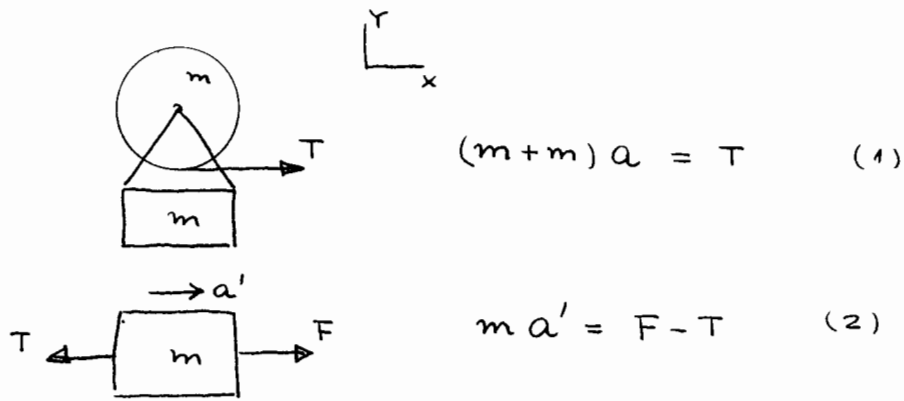


El cilindro de masa  $m$  y radio  $R$  va montado sobre un bloque de masa  $m$  como indica la figura. Enrollado en el cilindro hay un hilo ideal cuyo extremo libre lo une a otro bloque de masa  $m$ . A este último bloque se le aplica una fuerza constante horizontal  $F$ . Ambos bloques se apoyan en una superficie horizontal lisa.

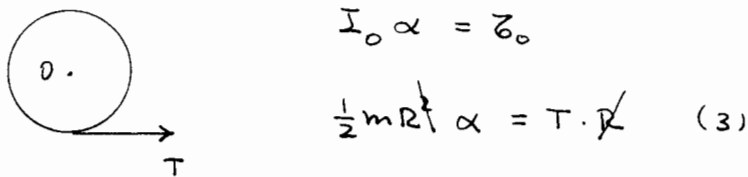
Determinar la tensión de la cuerda si ésta no resbala en el cilindro.

Determinar la tensión de la cuerda si ésta no resbala en el cilindro.

Consideremos en primer lugar los sistemas indicados.



Rotación del cilindro:



Ecuación cinemática:  $a' = a + R\alpha$  (4) (El hilo se desenrolla.)

De (2) y (4)  $ma + mR\alpha = F - T \quad (5)$

Pero, de (3):  $mR\alpha = 2T$

$\therefore$  Reemplazando en (5):  $ma + 2T = F - T$

$\text{or } ma = F - 3T \quad (6)$

Finalmente, de (1):  $ma = \frac{T}{2} \quad (7)$

y de (6) y (7):  $\frac{T}{2} = F - 3T \rightarrow \boxed{T = \frac{2}{7} F}$