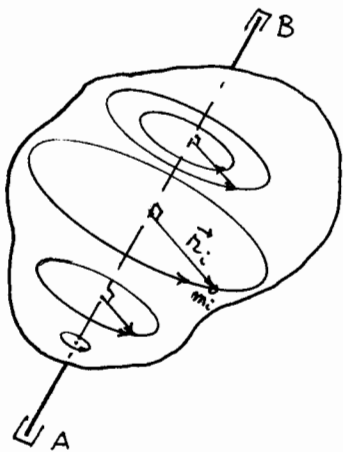


SÓLIDOS.

1. Rotación de un sólido en torno a un eje fijo.

Un sólido rígido o indeformable constituye un sistema especial de partículas: sus distancias mutuas permanecen invariables.



En un sólido que rota en torno a un eje fijo tal como AB, todos sus puntos describen trayectorias circulares de planos perpendiculares al eje de rotación y cuyos radios son las respectivas distancias a ese eje.

Recordemos entonces que en el movimiento circular de un punto distinguimos su velocidad lineal \vec{v} y su velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el punto describe un arco ds en un tiempo dt , de la definición de radián se tiene:

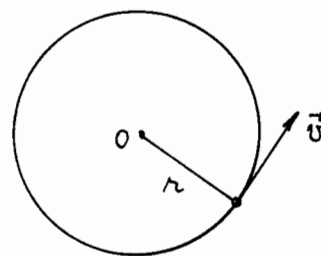
$$ds = r d\theta \quad (1)$$

donde $d\theta$ es el ángulo que subtiende ds en el centro del círculo.

De (1) formamos:

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

$r = de =$ radio de la trayectoria circular.



Pero $\frac{ds}{dt} = v =$ rapidez = módulo de \vec{v}

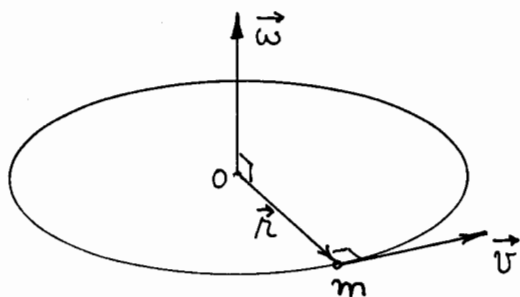
y $\frac{d\theta}{dt} = \omega =$ rapidez angular, expresada en radianes/segundo.

Luego,

$$\boxed{v = r\omega} \quad (3)$$

Vectorialmente, la relación entre ambas cantidades es

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4)$$



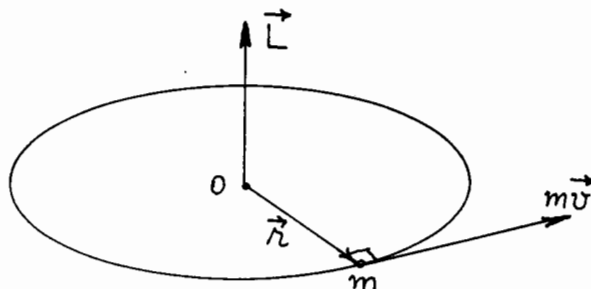
$\vec{\omega}$ es un vector perpendicular al plano de la trayectoria en su centro y cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha.

El vector \vec{r} , cuyo módulo corresponde al radio de la trayectoria, es el vector posición del punto material m .

Momentum angular de la partícula que recorre esta trayectoria.

El momentum angular \vec{L} de la partícula que recorre esta trayectoria circular es, por definición,

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (5)$$



donde $m\vec{v}$ es el momentum lineal o cantidad de movimiento de la partícula. Este vector \vec{L} es en consecuencia perpendicular al plano de la trayectoria.

En el sólido, sea una partícula genérica de masa m_i . De todo lo dicho anteriormente se tiene entonces que:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (6)$$

$$\text{y } L_i = |\vec{L}_i| = r_i m_i v_i \sin 90^\circ$$

$$\therefore L_i = r_i m_i v_i \quad (7)$$

Ahora, como $v_i = r_i \omega$ (8)

donde ω es la rapidez angular, común a todas las partículas del sólido,

$$L_i = m_i r_i^2 \omega \quad (9)$$

Sumando sobre todas las partículas del sólido: $L = \sum_i L_i$, o sea,

$$L = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \quad (10)$$

Se define entonces el parámetro inercial rotacional

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2} \quad (11)$$

denominado MOMENTO DE INERCIA del sólido respecto del eje de rotación. Esta cantidad da cuenta de la distribución de masa del cuerpo respecto de dicho eje, de la que depende el efecto rotacional sobre éste al aplicársele un determinado momento de fuerza.

De (10) y (11),

$$\boxed{L = I \omega} \quad (12)$$

Vectorialmente, $\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$ (12')

de modo que \vec{L} tiene la dirección del eje de giro según $\vec{\omega}$.

De nuestro estudio previo de sistemas de partículas en general, sabemos que la tasa de variación temporal del momentum angular del sistema es igual al momento resultante de las fuerzas exteriores.

Así, escalarmente, ya que la dirección del eje permanece fija :

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (13)$$

El momento M es entonces el momento resultante respecto del eje.

Luego, según (12),

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M \quad (14)$$

En un sólido invariable I es constante respecto del eje fijo, de modo que esta ecuación puede escribirse como

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (15)$$

Ahora, $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ es la aceleración angular del sólido

y por lo tanto, $I\alpha = M$ (16)

Esta última ecuación es la ecuación rotacional del cuerpo que rota en torno a un eje fijo.

En el sistema internacional de unidades, el momento M se expresa en $N \cdot m$, mientras que el momento de inercia se expresa en $kg \cdot m^2$ y la aceleración angular α en $rad./s^2$

Comentario. Si mediante algún dispositivo interno se pudiera variar la distribución de masa respecto del eje de giro y en el caso en que M fuera nulo, entonces, de (14), se observa que $I\omega$ debe mantenerse constante, en cuyo caso debe cumplirse que

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = \text{cte.}$$

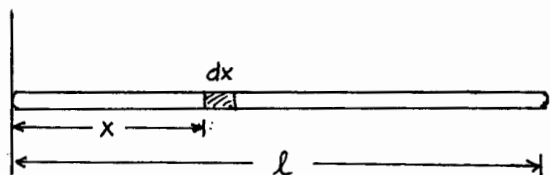
Luego, al pasar I desde el valor I_1 a otro I_2 , la velocidad angular se ajusta automáticamente a : $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1$

Momento de Inercia.

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

a) Barra delgada uniforme de masa m y longitud l .

Calcularemos su momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la barra por uno de sus extremos.



Consideremos un elemento infinitesimal dx de barra, a la distancia x del eje en consideración. En este elemento de barra hay

un cierto número de partículas totalizando una masa que denominaremos como dm . De este modo, el momento de inercia correspondiente, que designaremos como dI , lo podemos expresar como:

$$dI = x^2 dm$$

Este procedimiento nos permite reemplazar la sumatoria por una integral para el cálculo del momento de inercia de la barra:

$$\int_{(m)} dI = \int_{(m)} x^2 dm \quad \rightarrow \quad I = \int_{(m)} x^2 dm.$$

extendiendo la integral ("suma") sobre toda la masa de la barra.

Ahora bien, para evaluar esta integral recurrimos a la definición de densidad. Si la barra es homogénea, la densidad local $\rho = \frac{dm}{dV}$ es igual en cualquier zona de la barra y por lo tanto será igual también a $\frac{m}{V}$.

$$\text{Así,} \quad \rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V}$$

De este modo:
$$I = \int_{(m)} x^2 dm = \int x^2 \rho dV = \rho \int x^2 dV$$

Pero $dV = A dx$ si llamamos A a la sección transversal de la barra.

Con esto,

$$I = A \rho \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx$$

Se trata de una "integral definida", entre los límites 0 y l .

Su resultado es
$$\int_0^l x^2 dx = \left| \frac{1}{3} x^3 \right|_0^l = \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} l^3$$

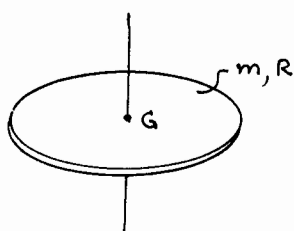
Luego,
$$I = A \rho \frac{1}{3} l^3$$

Finalmente,
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{lA} \rightarrow A \rho = \frac{m}{l}$$

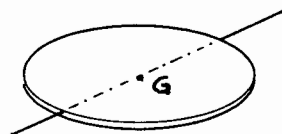
Reemplazando:

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

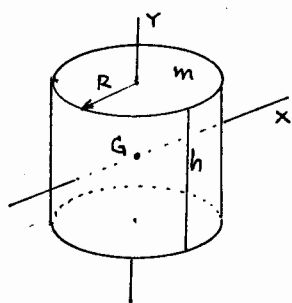
Otros momentos de inercia.



$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

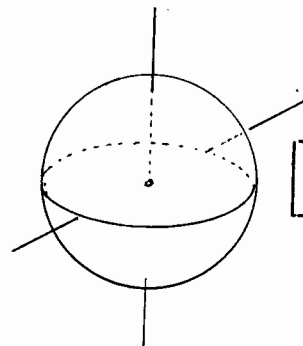


$$I = \frac{1}{4} m R^2$$



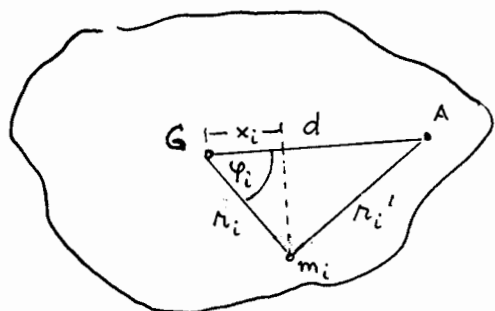
$$I_Y = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_X = \frac{1}{12} m (3R^2 + h^2)$$



$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

TEO. DE STEINER ("de los ejes paralelos")



Sean dos ejes paralelos, por G (centro de masa del cuerpo) y por A (punto arbitrario del mismo), perpendiculares al plano del papel.

Sea m_i una partícula genérica, r_i su distancia al eje por G, r_i' su distancia al eje que pasa por A y d distancia entre ejes.

De la figura, mediante el teorema general de Pitágoras :

$$r_i'^2 = r_i^2 + d^2 - 2 r_i d \cos \varphi_i$$

Pero, $r_i \cos \varphi_i = x_i$

$$\therefore r_i'^2 = r_i^2 + d^2 - 2 x_i d \quad / \cdot m_i$$

$$m_i r_i'^2 = m_i r_i^2 + m_i d^2 - 2 m_i x_i d$$

A continuación, sumando sobre todas las partículas del cuerpo :

$$\underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{I_A} = \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{I_G} + \underbrace{(\sum m_i) d^2}_m - 2 \underbrace{(\sum m_i x_i)}_{=0} d$$

De la definición de centro de masa : $\sum_i m_i x_i = 0$.

Se obtiene finalmente que

$$\boxed{I_A = I_G + m d^2} \quad (17)$$

Teo. de Steiner

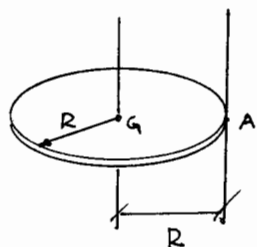
donde I_A = momento de inercia del cuerpo respecto de eje por A

I_G = momento de inercia respecto de eje paralelo por G

El teorema de Steiner establece que el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje que pasa por un punto arbitrario A es igual a la suma del momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por su centro de masa G más el producto de la masa del cuerpo por la distancia entre los ejes.

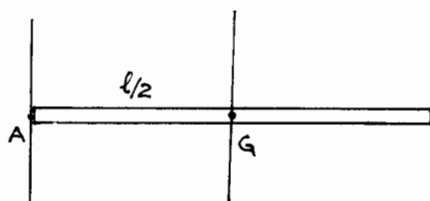
Se observa que para una dirección dada respecto del cuerpo, el menor momento de inercia es el que corresponde al eje con esa dirección que pasa por el centro de masa G.

Ejemplo. a) Calcular el momento de inercia de un disco (m, R), respecto de un eje paralelo al eje de simetría por un punto del borde del disco.



$$\begin{aligned} I_A &= I_G + mR^2 \\ &= \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 \\ &= \frac{3}{2}mR^2 \end{aligned}$$

b) Calcular el momento de inercia de una barra (m, ℓ), respecto de un eje perpendicular a la barra por su centro.



$$I_A = I_G + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{3}m\ell^2 = I_G + m\frac{\ell^2}{4}$$

$$\rightarrow I_G = \frac{1}{3}m\ell^2 - \frac{1}{4}m\ell^2$$

$$\therefore \boxed{I_G = \frac{1}{12}m\ell^2}$$

Energía cinética de rotación (Sólido en rotación respecto de eje fijo)

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Energía cinética de la partícula de orden i.

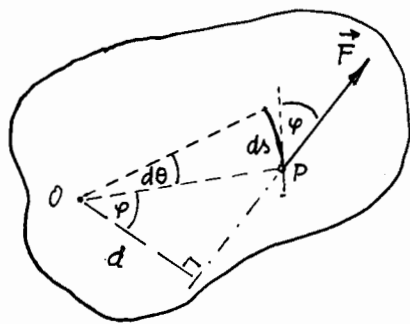
$$\begin{aligned} K &= \sum_i K_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$\therefore \boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2} \quad (18)$$

Trabajo - Energía Cinética. (Cuerpo en rotación en torno a eje fijo).



Sea \vec{F} la proyección sobre el plano perpendicular al eje de giro de la fuerza aplicada al cuerpo en P.

En una rotación infinitesimal del cuerpo debida al momento de \vec{F} respecto del eje de giro, se realiza un trabajo dW :

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= F ds \cos \varphi \\ &= F(r d\theta) \cos \varphi \\ &= F(r \cos \varphi) d\theta \\ &= F d d\theta \end{aligned}$$

Pero, $Fd = M$ por lo que $dW = M d\theta$ (19)

De (19) formamos: $\frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt}$ o $P = M\omega$ (20)

donde $P = \frac{dW}{dt}$ es la potencia o trabajo por unidad de tiempo, medido en $\frac{J}{s}$

De (19): $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$ trabajo en una rotación finita.

Como $M = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\theta} \rightarrow M d\theta = I\omega d\omega$

$$\therefore W = I \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega \rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2} \quad (21)$$

o $\boxed{W = \Delta K} \quad (21')$