

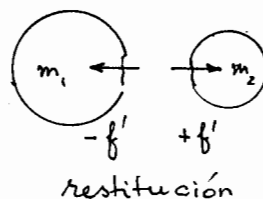
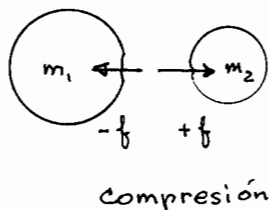
C. Choque inelástico.

En el choque inelástico la energía cinética del sistema no se conserva en alguna medida pero en cambio sigue conservándose la cantidad de movimiento del mismo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (11)$$

que es la ecuación (1) de la página 87 para el caso de las dos esferas.

Para determinar las velocidades finales v_1' y v_2' necesitamos analizar en detalle las fases de compresión y restitución (a) \rightarrow (c) y (c) \rightarrow (d) mencionadas en la misma página.



Etapas de compresión : duración $\Delta t = t - 0$

Sean $\frac{dp_1}{dt} = -f$ y $\frac{dp_2}{dt} = f$

las ecuaciones de movimiento de ambas esferas. El teorema del impulso en ambos casos establece que

$$m_1 V - m_1 v_1 = - \int_0^t f dt \quad \text{y} \quad m_2 V - m_2 v_2 = + \int_0^t f dt$$

de donde se desprende que la velocidad relativa de las esferas antes del choque es igual a :

$$v_1 - v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \int_0^t f dt \quad (12)$$

Etapa de restitución: duración $\Delta t' = t' - t$

$$m_1 v_1' - m_1 v = - \int_t^{t'} f' dt \quad \text{y} \quad m_2 v_2' - m_2 v = + \int_t^{t'} f' dt$$

La velocidad relativa $v_1' - v_2'$ de ambas esferas después del choque es

$$v_1' - v_2' = - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \int_t^{t'} f' dt \quad (13)$$

Experimentalmente se encuentra que

$$\int_t^{t'} f' dt = e \int_0^t f dt \quad (14)$$

donde e , llamado coeficiente de restitución, es aproximadamente constante para dos cuerpos que chocan, dependiendo de la naturaleza de éstos y cuyo valor es $0 < e < 1$

De las ecuaciones (12), (13) y (14) se desprende que la relación entre las velocidades relativas de ambas esferas, antes y después del choque, es:

$$\boxed{v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2)} \quad (15)$$

Esta es la regla de Newton en su forma general

Se observa que $e = 1$ corresponde al caso elástico estudiado en B. (ec. (6)).

De igual modo, $e = 0$ correspondería al choque plástico visto en A.

El sistema de ecuaciones (11) y (15) conduce a los valores de v_1' y v_2' :

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - e m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

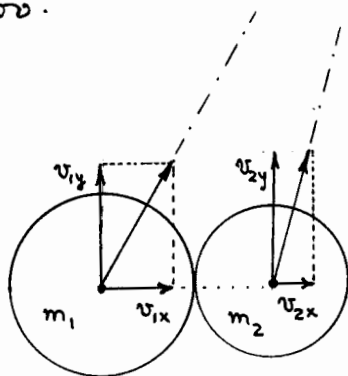
$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (17)$$

Con $e = 1$ se obtienen las ecuaciones (9) y (10) del caso elástico.

CHOQUE CENTRAL OBLÍCUO DE DOS ESFERAS.

Consideraremos el caso en que las esferas son lisas y el fenómeno es en dos dimensiones, ésto es, que las velocidades de ambas esferas antes del choque y la línea de sus centros estén en un mismo plano.

Durante el impacto, las fuerzas percusivas de interacción actúan en la dirección de los centros (línea de choque), de modo que solamente se ven alteradas las componentes de las velocidades iniciales según dicha dirección. Las componentes normales a la línea de choque no se ven alteradas, dado que las esferas son lisas y no hay en consecuencia roce percusivo.



∴ Conservación de la cantidad de movimiento

$$x: m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}'$$

Además :

$$v_{1y} = v_{1y}' \quad \text{y} \quad v_{2y} = v_{2y}'$$

Luego, para determinar v_{1x}' y v_{2x}'

procedemos como en el choque central directo : la ecuación

$$\text{adicional necesaria es : } v_{1x}' - v_{2x}' = -e (v_{1x} - v_{2x})$$

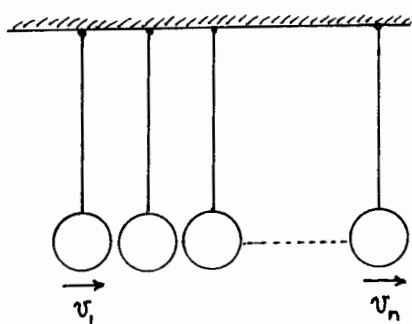
con lo cual se tiene :

$$v'_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - e m_2 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2} \quad (18)$$

$$v'_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + e m_1 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2} \quad (19)$$

Finalmente, con los valores calculados v'_{1y} , v'_{2y} , v'_{1x} y v'_{2x} se pueden determinar los ángulos θ'_1 y θ'_2 de las velocidades \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 .

Ejercicios.



- 1.) n esferas idénticas de masas m suspendidas en línea mediante hilos ideales de longitudes iguales de modo que las esferas casi se tocan. La primera choca a la segunda con velocidad v_1 .

a) Si el coeficiente de restitución común es e , encontrar la velocidad v_n con que arranca la n -ésima esfera al ser impactada por la $(n-1)$. b) ¿Qué condición debería cumplirse para que la n -ésima arrancara con igual velocidad v_1 que la primera? c) Cumplida la condición pedida en b), ¿podrían arrancar las dos últimas juntas con velocidad común $(v_1/2)$?

- a) De (16) y (17), con $v_2 = 0$ y $m_1 = m_2 (=m)$:

$$v'_1 = \frac{m v_1 - m e v_1}{2m} \rightarrow v'_1 = \frac{1-e}{2} v_1$$

$$v'_2 = \frac{m v_1 + m e v_1}{2m} \rightarrow v'_2 = \frac{1+e}{2} v_1$$

Se observa que $v'_1 > 0$; $v'_2 > 0$ y $v'_2 > v'_1$ y la esfera 2 arranca con velocidad $\frac{1+e}{2} v_1$

De este modo, la esfera 3 arrancará con $v_3 = \frac{1+e}{2} v_2 = \frac{1+e}{2} \cdot \frac{1+e}{2} v_1$

$$\therefore v_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 v_1$$

y la n -ésima :
$$v_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} v_1$$

b) Si $e=1$, del resultado anterior se tiene $v_n = v_1$. Esto significa que los choques deberían ser elásticos.

Además, de $v_1' = \frac{1-e}{2} v_1$ se desprende que cada esfera que choca a la siguiente queda instantáneamente en reposo.

c) Como el choque debe ser elástico, debe conservarse la energía cinética, lo que no se cumpliría en el caso propuesto.

Pensemos en las tres primeras esferas, donde la esfera 1 choca a la 2 con velocidad v_1 y supongamos que arrancan la 2 y la 3 con velocidad $v_1/2$.

Se conserva la cantidad de movimiento, ya que :

$$m v_1 = (2m) \frac{v_1}{2} = m v_1$$

No se conserva la energía cinética :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} (2m) \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m v_1^2$$

Por lo tanto no puede darse el caso en que las dos últimas arranquen con velocidad $v_1/2$.

2) Se deja caer al piso una esfera de coeficiente de restitución $e=0,9$ desde una altura de 3 m. a) Calcular el tiempo que tardará en alcanzar el reposo. b) Calcular la distancia total recorrida en las subidas y bajadas.

Se desprecia el roce con el aire.

Sea v_n la velocidad con que la esfera golpea el piso en el n -ésimo bote.
La velocidad del piso es nula en todo momento.

De la ecuación (15): $v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2)$ se tiene:

$$v_{n+1} = e v_n \quad (\text{prescindiendo del signo})$$

ya que la velocidad con que la bola golpea el piso en un determinado impacto es justamente la velocidad de rebote en el impacto anterior.

Ahora bien, el tiempo transcurrido entre el impacto n -ésimo y el $(n+1)$ -ésimo es:

$$t_n = 2 \frac{v_{n+1}}{g} = \frac{2 e^n v_1}{g}$$

Al soltar la bola inicialmente desde la altura h , el tiempo que tarda en golpear el piso por primera vez es

$$t_0 = \frac{v_1}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

En esta forma, $t_n = 2 e^n t_0$

El tiempo total que transcurre hasta llegar al reposo es:

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots$$

Serie geométrica:

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

$$= t_0 (1 + 2e + 2e^2 + \dots + \dots)$$

$$\boxed{e = 2,71828}$$

$$= t_0 [1 + 2e(1 + e + e^2 + \dots)]$$

$$= t_0 \left[1 + 2e \cdot \frac{1}{1-e} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9,8}} \cdot \frac{1,9}{0,1} \approx 14,9 \text{ s.}$$

- b) La distancia recorrida entre el n -ésimo bote y el $(n+1)$ -ésimo es $2h_n$, donde h_n es la altura del rebote después del n -ésimo bote:

$$h_n = \frac{v_{n+1}^2}{2g} = \frac{e^2 v_n^2}{2g} = \frac{e^{2n} v_1^2}{2g} = e^{2n} h.$$

Como $s = h + 2h_1 + 2h_2 + \dots$

$$= h (1 + 2e^2 + 2e^4 + \dots)$$

$$= h [1 + 2e^2 (1 + e^2 + e^4 + \dots)] \quad q = e^2$$

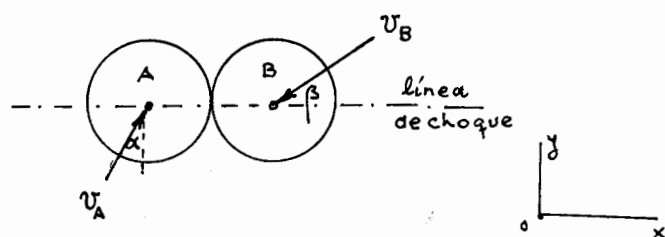
$$= h \left(\frac{1-e^2}{1+e^2} \right) = 3 \cdot \frac{1,81}{0,19} = 28,58 \text{ m}$$

El número de rebotes es en teoría infinito mientras que el tiempo total y camino total recorrido son finitos.

3. Dos discos idénticos chocan en las condiciones indicadas en la figura. El coeficiente de restitución entre ambos es $e = 0,8$. Determinar los vectores velocidad de ambos luego del choque.

$$\alpha = 30^\circ ; \quad \text{sen } \beta = \frac{3}{5} ; \quad \text{cos } \beta = \frac{4}{5}$$

$$v_A = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad v_B = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Adoptemos ejes x e y , x en dirección de la línea de choque e y perpendicular a dicha línea.

La conservación del momentum lineal en la dirección x :

$$m v_{Ax} \text{ sen } 30^\circ - m v_{Bx} \text{ cos } \beta = m v'_{Ax} + m v'_{Bx}$$

$$\therefore 4 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{4}{5} = v'_{Ax} + v'_{Bx} \quad \rightarrow \quad \boxed{v'_{Ax} + v'_{Bx} = -2} \quad (i)$$

Además,

$$e = - \frac{v'_{Ax} - v'_{Bx}}{v_{Ax} - v_{Bx}}$$

$$0,8 = - \frac{v'_{Ax} - v'_{Bx}}{v_A \sin 30^\circ - (-v_B \cos \beta)}$$

$$= - \frac{v'_{Ax} - v'_{Bx}}{4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{4}{5}}$$

Finalmente, $\boxed{v'_{Ax} - v'_{Bx} = -4,8} \quad (ii)$

Resolviendo el sistema (i), (ii) se obtiene:

$$v'_{Ax} = -3,4 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v'_{Bx} = 1,4 \text{ m/s}$$

Además, $v'_{Ay} = v_{Ay} = v_A \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,87 = 3,48 \text{ m/s}$

$$v'_{By} = v_{By} = -v_B \sin \beta = -5 \cdot \frac{3}{5} = -3 \text{ m/s}.$$

De este modo,

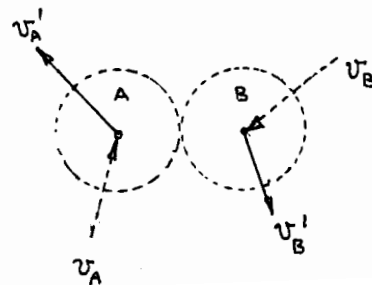
$$\vec{v}'_A = -3,4 \hat{i} + 3,48 \hat{j} \quad \rightarrow \quad v'_A = 4,86 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}'_B = 1,4 \hat{i} - 3,0 \hat{j} \quad \rightarrow \quad v'_B = 3,3 \text{ m/s}$$

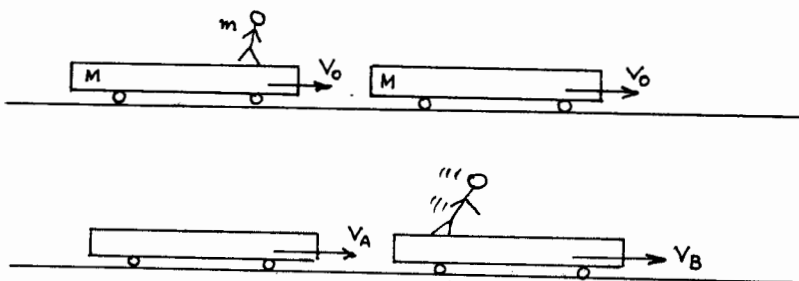
Los ángulos θ_A y θ_B que forman con la dirección x son

$$\theta_A = \arctan \frac{3,48}{3,4} = 45,07^\circ$$

$$\theta_B = \arctan \frac{3}{1,4} = 65^\circ$$



4. Dos carros idénticos, de masas M , se mueven en línea recta con velocidad V_0 , manteniendo una pequeña distancia entre ellos. Un sujeto de masa m viaja en el carro posterior. En un cierto instante el hombre salta hacia el carro delantero con velocidad u relativa al carro posterior. Encontrar las velocidades finales de ambos carros.



A) Sistema carro posterior + hombre :

Al saltar, la velocidad absoluta del hombre es $(V_0 + u)$.

conservación del momentum lineal : (antes de saltar = después de saltar)

$$(M+m)V_0 = MV_A + m(V_0 + u) \rightarrow V_A = \frac{MV_0 - mu}{M} \quad (1)$$

B) Sistema carro delantero + hombre :

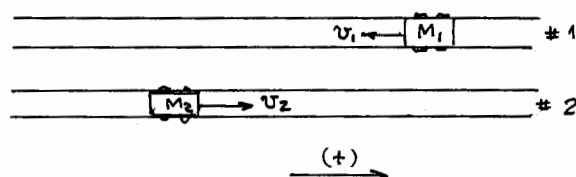
conservación del momentum lineal : (antes de "aterrizar" = después de "aterrizar")

$$MV_0 + m(V_0 + u) = (M+m)V_B \rightarrow V_B = \frac{(M+m)V_0 + mu}{M+m} \quad (2)$$

5. Dos carros idénticos, con un pasajero en cada uno de ellos, se mueven en sentidos contrarios por dos pistas rectilíneas paralelas suyas. Al momento de cruzarse ambos carros los respectivos pasajeros saltan al carro contrario, perpendicularmente a la dirección del movimiento. Como resultado de lo anterior se observa que el carro 1 se detiene mientras que el carro 2 continúa en su misma di-

rección, pero con velocidad v .

Calcular las velocidades iniciales v_1 y v_2 de los carros sabiendo que sus masas son iguales ($M_1 = M_2 = M$) como asimismo las de los pasajeros ($m_1 = m_2 = m$).



Debido a que los saltos son perpendiculares a la dirección de los movimientos de los carros, no se modifica la velocidad de éstos ni de los hombres mientras éstos últimos se encuentren en el aire. Al "aterrizar" cada uno de ellos cambian las velocidades.

Necesitamos dos ecuaciones entre las velocidades v_1 y v_2 . Para esto, consideremos los sistemas (M_1, m_2) y (M_2, m_1) y escribamos la conservación de la cantidad de movimiento para ambos sistemas para los instantes justo antes de aterrizar en el carro contrario y justo después.

$$-M_1 v_1 + m_2 v_2 = (M_1 + m_2) \cdot 0 \quad (1)$$

$$\text{y} \quad M_2 v_2 - m_1 v_1 = (M_2 + m_1) \cdot v \quad (2)$$

$$\text{o} \quad -M v_1 + m v_2 = 0 \quad (3) \quad \text{ya que } M_1 = M_2 \text{ y } m_1 = m_2$$

$$\text{y} \quad M v_2 - m v_1 = (M + m) v \quad (4)$$

$$\text{De (3): } v_2 = \frac{M}{m} v_1 \quad \text{Reemplazando en (4): } \frac{M^2}{m} v_1 - m v_1 = (M + m) v$$

$$\text{o} \quad \frac{M^2 - m^2}{m} v_1 = (M + m) v \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1 = \frac{m}{M - m} v}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{M}{M - m} v}$$