

MOMENTUM LINEAL.

Reescribiendo la ecuación de movimiento $\vec{F} = m\vec{a}$ de una partícula como

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{y luego como} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

ya que la masa m de la partícula puede ser considerada como estrictamente constante para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, como son las que se consideran en la mecánica clásica, se define entonces la cantidad vectorial

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \quad (1)$$

conocida con los nombres de "momentum lineal", "cantidad de movimiento" o simplemente como "momento lineal" de la partícula.

En el sistema internacional de unidades se expresa en $[\text{kg m/s}]$.

En términos de esta cantidad, que según se verá más adelante presenta interesantes propiedades en determinadas circunstancias, la ecuación de movimiento toma la forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

Siendo \vec{F} la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, si $\vec{F} = \vec{0}$, entonces, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ de donde se desprende que $\vec{p} = \text{cte}$. Por tratarse de una cantidad vectorial constante

debe entenderse que son constantes su magnitud y su dirección. En consecuencia, la partícula en estas condiciones se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

Escribiendo (2) como $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$, si derivamos el producto del segundo miembro:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3)$$

Por supuesto, si $m = \text{cte}$ como en el caso de una partícula, la ecuación se reduce a $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ o $\vec{F} = m\vec{a}$. En cambio, si m varía, como en el caso del cohete impulsor de una nave espacial o en el caso más simple de un carro con arena que pierda arena por un orificio del fondo mientras se desplaza, entonces la ecuación (3) permite analizar dichas situaciones.

La ecuación (2) establece que "la tasa de variación temporal del momentum lineal de una partícula es igual a la fuerza resultante que actúa sobre ella".

Siendo \vec{p} una cantidad vectorial, podemos expresarla, por ejemplo, en términos de sus componentes en un sistema de ejes cartesianos:

$$\vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} \quad (4)$$

Si su derivada temporal es entonces, con \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} vectores constantes,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp_x}{dt} \hat{i} + \frac{dp_y}{dt} \hat{j} + \frac{dp_z}{dt} \hat{k} \quad (5)$$

También, $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

de modo que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ queda expresado como :

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \frac{dp_x}{dt} \hat{i} + \frac{dp_y}{dt} \hat{j} + \frac{dp_z}{dt} \hat{k}$$

Multipliando escalarmente esta última ecuación por \hat{i} se obtiene la ecuación escalar :

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \text{ ya que } \hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \text{ mientras que } \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0.$$

En igual forma, multiplicándola escalarmente por \hat{j} y finalmente por \hat{k} , se obtienen las restantes ecuaciones escalares :

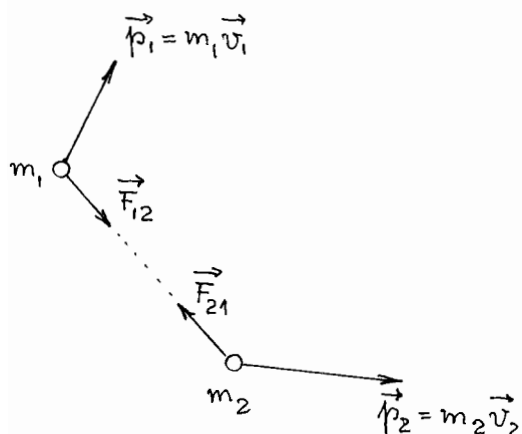
$$F_y = \frac{dp_y}{dt} \quad \text{y} \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

Se observa que si una de las componentes escalares de la fuerza \vec{F} , por ejemplo $F_y = 0$, entonces la correspondiente componente escalar del momentum lineal, en este caso p_y , resulta ser constante : $p_y = mv_y = \text{cte.}$

Conservación del momentum lineal para un sistema de dos partículas.-

Sea un sistema compuesto por dos partículas que pueden interactuar únicamente entre sí. Es lo que solemos denominar como sistema aislado.

En la figura :



m_1 y m_2 : masas de las partículas

\vec{p}_1 y \vec{p}_2 : sus momentos lineales instantáneos.

\vec{F}_{12} : fuerza sobre m_1 ejercida por m_2

\vec{F}_{21} : fuerza sobre m_2 ejercida por m_1

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (fuerzas tipo acción-reacción)

Las ecuaciones de movimiento de ambas partículas son :

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad (7)$$

y

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (8)$$

de modo que :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = - \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\text{o} \quad \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

de donde, finalmente, se concluye que :

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cte}} \quad (9)$$

o sea que "el momentum lineal del sistema es constante".

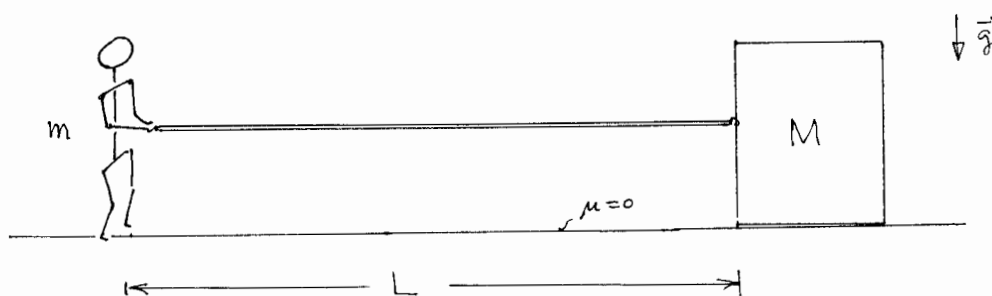
Se entiende como momento lineal del sistema a la suma vectorial de los momentos de sus componentes, ésto es,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (10)$$

Cabe destacar que los momentos lineales de cada partícula son funciones del tiempo, es decir, varían, pero su suma es una constante: $\vec{P} = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \vec{cte}$.

Como aplicación consideremos el siguiente ejemplo:

Sobre una superficie horizontal lisa se encuentran un hombre, de masa m , y un bloque, de masa M , unidos por una cuerda ideal (inextensible, masa despreciable). El sujeto, en un cierto instante, da un rápido tirón a la cuerda, lo que causa que ambos cuerpos se pongan en movimiento. Si la separación inicial es L se pide calcular la posición en que se produce el encuentro de ambos.



El "tirón" implica la aplicación prácticamente instantánea de dos fuerzas internas del sistema, de gran intensidad y de sentidos contrarios, aplicadas, una sobre el hombre y la otra sobre el bloque.

Estas fuerzas son de magnitud desconocida y producen aceleraciones a_m y a_M de los cuerpos.

El peso de cada cuerpo así como las reacciones normales correspondientes son perpendiculares a la superficie lisa y por lo tanto no influyen en el movimiento.

El movimiento de ambos cuerpos es en una dimensión. Los momentos lineales correspondientes son entonces

$$\vec{p}_m = m v \hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{p}_M = -M V \hat{i}$$

Considerando como dirección positiva la de izquierda a derecha. Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento (momento lineal) del sistema en esta dirección, es decir, igualando la cantidad de movimiento del sistema justo antes del tirón con la cantidad de movimiento del mismo justo después del tirón:

$$0 \hat{i} = m v \hat{i} - M V \hat{i}$$

o sea, escalarmente: $0 = m v - M V$

Poniendo: $m v = M V \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{M}{m} \quad (11)$

es decir, las velocidades con que se ponen en movimiento los cuerpos son inversamente proporcionales a sus masas. En este caso en particular, estas velocidades se mantienen, ya que luego del tirón, no hay fuerzas sobre los cuerpos en el plano del movimiento, de modo que

$$x_m = v t^*$$

$$\text{y} \quad x_M = V t^*$$

t^* = tiempo transcurrido desde el tirón hasta el encuentro.

$$\therefore \frac{v}{V} = \frac{x_m}{x_M} \quad (12)$$

De (11) y (12) se obtiene:

$$\frac{x_m}{x_m} = \frac{M}{m} \rightarrow \frac{x_m}{x_m + x_M} = \frac{M}{m + M}$$

Como $x_m + x_M = L$, se obtiene:

$$\boxed{x_m = \frac{M}{m + M} L}$$

Ésto es, el encuentro se produce a esta distancia de la posición inicial de m .

Impulso de una fuerza.

De lo dicho anteriormente podemos considerar como la expresión más general de la segunda ley de Newton a la ecuación

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ con } \vec{p} = m\vec{v}$$

Se puede reescribir como:

$$\vec{F} dt = d\vec{p} \quad (13)$$

Consideremos primeramente el caso $\vec{F} = \vec{a}t$, o sea, el caso en que la partícula m se desplaza con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Podemos entonces poner $F \hat{i} dt = d(p \hat{i}) / \cdot \hat{i}$

o simplemente, multiplicando escalarmente por \hat{i} :

$$F dt = dp \quad (14)$$

Considerando el desplazamiento de la partícula correspondiente a los instantes arbitrarios t_1 y t_2 podemos escribir:

$$F \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{p(t_1)}^{p(t_2)} dp \quad \longrightarrow \quad F(t_2 - t_1) = p(t_2) - p(t_1)$$

o simplemente : $F \Delta t = \Delta p \quad (15)$

Ilustremos esto con un ejemplo : sobre un cuerpo en reposo, de masa $m = 5 \text{ kg}$ se aplica una fuerza constante durante 15 s , a consecuencia de lo cual su velocidad alcanza el valor de $4,0 \text{ m/s}$. Calcular el valor de la fuerza.

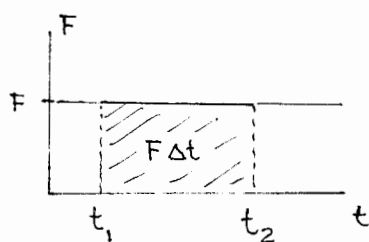
$$\begin{aligned} \text{De } F \Delta t = \Delta p \quad , \quad \text{con } \Delta t = 15 \text{ s} \quad \text{y} \quad \Delta p = \Delta(mv) = mv - 0 \\ = 5 \text{ kg} \cdot 4,0 \text{ m/s} \\ = 20 \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

$$\therefore F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{20 \text{ kg m/s}}{15 \text{ s}} = 1,3 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

o sea, $F = 1,3 \text{ N}$.

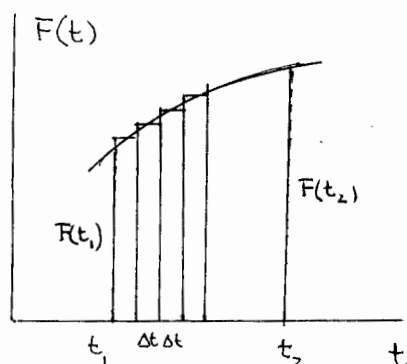
En este caso, el producto del valor de la fuerza constante por el tiempo que actuó sobre la masa m recibe el nombre de impulso de la fuerza y de (15) se observa que su valor es igual a la variación del momento lineal (cantidad de movimiento) de la partícula, resultado que generalizaremos más adelante.

Gráficamente,



Se observa en el gráfico que el impulso de la fuerza es numéricamente igual al área encerrada entre la recta $F = at$, el eje de los tiempos y las ordenadas $F(t_1)$ y $F(t_2)$ correspondientes a los tiempos t_1 y t_2 .

A continuación y siempre en una dimensión, consideremos el caso en que la magnitud de la fuerza que actúa sobre la partícula varía mientras ésta se desplaza. Gráficamente,



Dividiendo el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$ en subintervalos Δt_i pequeños se observa que el rectángulo genérico de orden i tiene un área $F(t_i) \Delta t_i$ que corresponde al impulso de la fuerza media F_i en el intervalo Δt_i .

La suma de estos rectángulos se

aproximará tanto más al valor del impulso de la fuerza en el intervalo Δt , cuanto más pequeños sean los subintervalos en que se ha dividido el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, en otras palabras, cuanto mayor sea su número, tendiendo el valor del área bajo la curva. Llamando I al impulso se tiene así,

$$I = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i F(t_i) \Delta t_i$$

En el lenguaje del cálculo:
$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \quad (16)$$

Entonces, de (14):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt &= p(t_2) - p(t_1) \\ &= m v(t_2) - m v(t_1) \end{aligned}$$

Es decir que el impulso de la fuerza es igual a la variación del momento lineal que experimenta la partícula en el intervalo de tiempo considerado.

En tres dimensiones, de (13), en general:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m \vec{v}(t_2) - m \vec{v}(t_1)} \quad (17)$$

resultado conocido como teorema del impulso

Escalarmente equivale a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt &= m v_x(t_2) - m v_x(t_1) \\ \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt &= m v_y(t_2) - m v_y(t_1) \\ \int_{t_1}^{t_2} F_z(t) dt &= m v_z(t_2) - m v_z(t_1) \end{aligned} \quad (18)$$

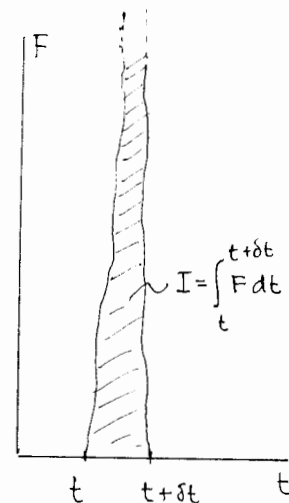
Fuerzas percusivas.

Se trata de fuerzas cuya intensidad crece desde cero hasta valores muy grandes para luego decrecer hasta cero nuevamente en intervalos de tiempo extremadamente cortos. El impulso correspondiente resulta ser de tal magnitud que la variación del momento lineal de un cuerpo de masa pequeña se traduce en una enorme variación de su velocidad. Baste pensar en el efecto resultante

del bastonazo sobre una pelota de golf.

En el gráfico adjunto se ha representado el caso de una fuerza percusiva.

En ciertas ocasiones se recurre a estimar el valor promedio $\langle F \rangle$ en el intervalo Δt .



Experimentos realizados con dos esferas de acero de 1 kg cada una, una fija y la otra móvil, incidiendo frontalmente con una velocidad de 1 m/s, han permitido medir la duración media de los choques, estimándose en $1/6.000$ de segundo, ésto es,

$$\Delta t = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,000167 \text{ s}$$

Una estimación de la fuerza media correspondiente que se desarrolla durante la interacción se obtiene de :

$$\langle F \rangle \cdot \Delta t = m v_f - 0$$

$$\therefore \langle F \rangle = \frac{m v_f}{\Delta t} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{6.000} \text{ s}}$$

$$\therefore \langle F \rangle \simeq 6.000 \text{ N} \simeq 600 \text{ kg-f}$$

En este sentido, a manera de ejercicio, se propone el siguiente problema práctico: un martillo cuya cabeza tiene una masa $m = 2,0 \text{ kg}$ lleva una velocidad $v = 6,0 \text{ m/s}$ al golpear la cabeza de un clavo, haciéndolo penetrar a una cierta profundidad

en un pesado bloque de madera dura. La duración del impacto ha sido estimada en $\Delta t \cong 0,002 \text{ s}$. Estimar la fuerza promedio ejercida sobre el clavo y la profundidad a que penetra éste en el bloque.

Veamos, la fuerza promedio que desacelera la cabeza del martillo hasta detenerla corresponde a las fuerzas de roce de la madera sobre el clavo, quien la ejerce sobre el martillo. Esta se calcula de

$$\langle F_R \rangle \cdot \Delta t = m \Delta v \rightarrow \langle F_R \rangle = \frac{2,0 \text{ kg} (0 - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{0,002 \text{ s}} = -6.000 \text{ N}$$

Por lo tanto, la fuerza media sobre el clavo será igual a

$$\langle F \rangle = -\langle F_R \rangle = 6000 \text{ N}.$$

A continuación, la energía cinética del martillo al alcanzar al clavo es

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 36 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 36 \text{ J}$$

y al detenerse, $K = 0$ lo que da una variación

$$\Delta K = (0 - 36) \text{ J} = -36 \text{ J}$$

Finalmente, de acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, esta variación debe ser igual al trabajo de la fuerza media $\langle F_R \rangle$ en el desplazamiento x de la cabeza del martillo en contacto con el clavo (se supone que no hay rebote):

$$W = \langle F_R \rangle \cdot x = -6000 \text{ N} \cdot x$$

Luego, de $W = \Delta K$:

$$x = \frac{\Delta K}{\langle F_R \rangle} = \frac{-36}{-6000} \frac{\text{J}}{\text{N}} = 0,006 \text{ m}$$

$$\therefore x = 6 \text{ mm}.$$

COLISIONES.

En el choque de dos cuerpos se generan fuerzas de interacción percusivas cuyos impulsos y efectos sobre los cuerpos son de tal magnitud que frente a ellos los impulsos y efectos de las fuerzas ordinarias simultáneas son absolutamente despreciables. Entre estas fuerzas ordinarias se encuentra casi generalmente la fuerza peso.

Ahora bien, como estos impulsos percusivos corresponden a fuerzas interiores del sistema, se desprende que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en el choque.

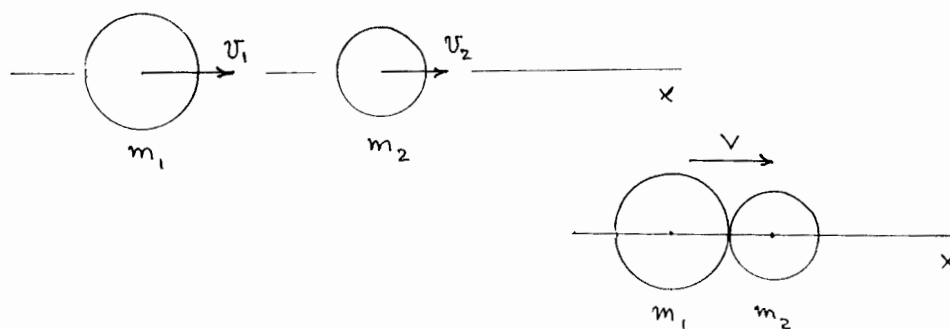
Por el contrario, la energía cinética del sistema no se conserva en general, dependiendo la magnitud de su variación de la naturaleza de los cuerpos que chocan. Sin embargo, hay casos en que esta variación es tan pequeña que resulta despreciable. Idealizando esta situación, definimos el choque elástico como aquel en que se conservan tanto el momento lineal del sistema como su energía cinética.

Todo choque en que haya variación de la energía cinética es un choque inelástico. En particular un choque en que ambos cuerpos continúan juntos con igual velocidad constituye un caso de choque perfectamente inelástico o choque plástico.

Nos limitaremos por el momento a examinar el choque de dos pequeñas esferas cuyos centros de gravedad se mueven sobre una misma línea: choque central

A) Choque plástico (completamente inelástico)

Sean dos esferas de masas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1 = v_1 \hat{i}$ y $\vec{v}_2 = v_2 \hat{i}$ con $v_1 > v_2$.



De la conservación del momento lineal en el choque :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

de donde se obtiene :

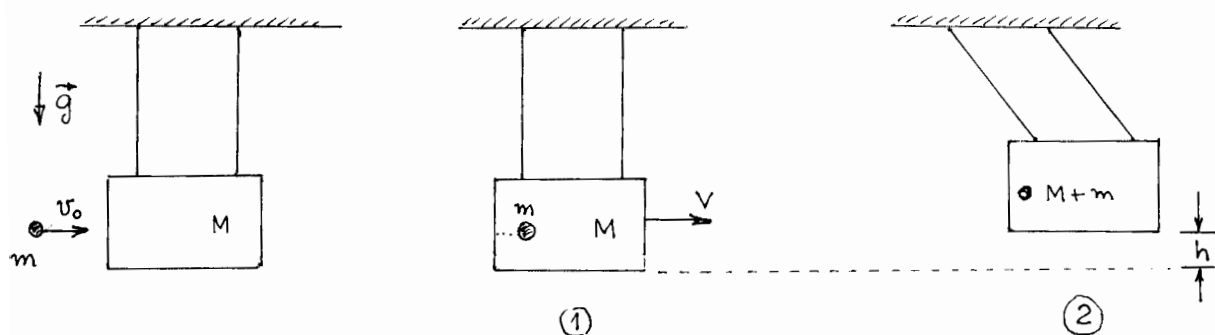
$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

V es la velocidad común luego del choque.

Ejemplo ilustrativo: Péndulo balístico.

Se trata de un dispositivo experimental destinado a medir la velocidad de un proyectil.

Se dispara un proyectil sobre una masa que permita que éste se incruste. El bloque se encuentra suspendido mediante un aparejo de cables que sólo le permiten desplazarse en un plano. Se mide la máxima elevación alcanzada en su desplazamiento debido al proyectil.



De la conservación del momento lineal en el impacto :

$$m v_0 = (m+M) V \quad (1) \quad \text{Choque plástico.}$$

De la conservación de la energía mecánica entre ① y ② :

$$\frac{1}{2} (m+M) V^2 = (m+M) g h \quad (2)$$

donde se ha despreciado la energía disipada como calor.

De (1) y (2), eliminando V :

$$v_0 = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

¿Qué proporción de la energía cinética inicial del sistema se ha transformado? Considerando la penetración de la bala en el bloque como prácticamente instantánea, la energía cinética del sistema en $t=0^-$ es la del proyectil :

$$K(0^-) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía cinética del sistema en $t=0^+$ es $K(0^+) = \frac{1}{2} (m+M) V^2$

$$\text{Pero, de (1): } V = \frac{m}{m+M} v_0 \rightarrow K(0^+) = \frac{1}{2} (m+M) \frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2$$

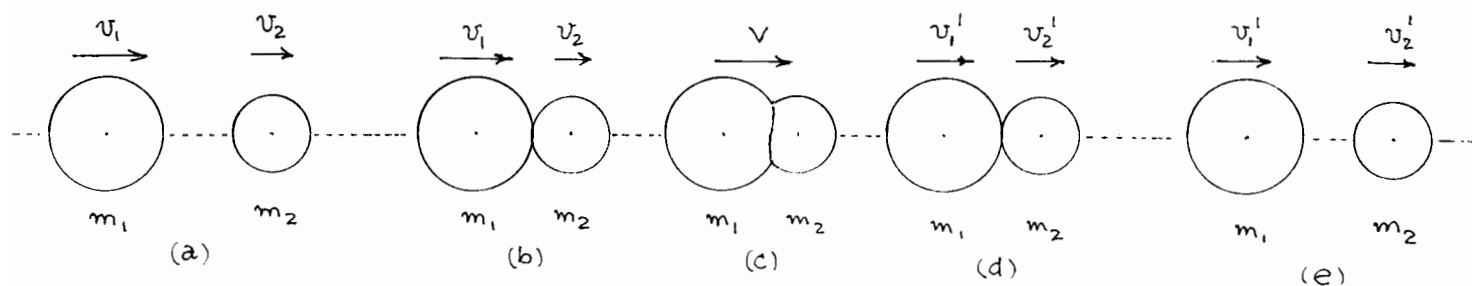
$$\text{es decir: } K(0^+) = \frac{1}{2} \frac{m^2}{(m+M)} v_0^2$$

$$\text{Así, } \Delta K = K(0^+) - K(0^-) = -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2$$

$$\text{Finalmente, } \frac{|\Delta K|}{K(0^-)} = \frac{1}{2} \frac{mM v_0^2}{m+M} \frac{2}{m v_0^2}$$

$$\text{o} \quad |\Delta K| = \frac{M}{m+M} K(0^-)$$

B. Choque elástico.



En la figura superior aparecen representadas varias etapas del choque elástico:

- (a) La esfera m_1 se aproxima a la m_2 . Sus velocidades son v_1 y v_2 respectivamente, con $v_1 > v_2$
- (b) Ambas esferas entran en contacto comenzando la fase de compresión
- (c) Ambas esferas han alcanzado su máxima deformación (exagerada en la figura), donde por un instante tienen una misma velocidad V .
- (d) Ha finalizado la fase de restitución elástica. Ahora sus respectivas velocidades tienen valores v_1' y v_2'
- (e) Esferas se separan.

Considerando las etapas (b) y (d), la conservación del momento lineal y de la energía cinética en el choque elástico conducen a las ecuaciones:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1) \quad \text{Conservación del momento lineal del sistema}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2) \quad \text{Conservación de la energía cinética del sistema.}$$

De (1) : $m_1(v_1 - v_1') = -m_2(v_2 - v_2')$ (3)

De (2) : $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = -m_2(v_2^2 - v_2'^2)$ (4)

Reescribiendo (4) en la forma :

$$m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = -m_2(v_2 + v_2')(v_2 - v_2') \quad (5)$$

y luego dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (5) ÷ (3) se obtiene :

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

o
$$\boxed{v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)} \quad (6) \quad \begin{array}{l} \text{REGLA} \\ \text{DE} \\ \text{NEWTON} \end{array}$$

"Las velocidades relativas son iguales, pero de signos contrarios"

Eliminando v_2' entre (6) y (1) y luego v_1' entre (6) y (1) :

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad (7)$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) expresan las velocidades de ambas esferas inmediatamente después del choque en términos de sus velocidades antes del choque. Estas ecuaciones suelen encontrarse escritas en la forma equivalente :

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

Mediante las ecuaciones (7) y (8) por ejemplo, podemos analizar algunos casos especiales:

$$\begin{aligned} \text{a) } m_1 = m_2 (=m) \quad & \text{De (7)} \rightarrow v_1' = v_2 \\ & \text{De (8)} \rightarrow v_2' = v_1 \end{aligned}$$

Es decir, ambos cuerpos intercambian velocidades.

$$\begin{aligned} \text{b) } m_1 = m_2 (=m) \quad & \text{De (7)} \rightarrow v_1' = 0 \\ & \text{y } v_2 = 0 \text{ (en reposo)} \quad \text{De (8)} \rightarrow v_2' = v_1 \end{aligned}$$

La esfera incidente queda en reposo y la esfera chocada arranca con la velocidad de la primera.

$$\begin{aligned} \text{c) Si } m_2 \gg m_1 \quad & v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1 \\ & \text{y } v_2 = 0 \\ & v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1 \end{aligned}$$

Si $m_2 \gg m_1$, $\frac{m_1}{m_2}$ es despreciable y entonces

$$v_1' = -v_1 \quad \text{y} \quad v_2' = 0$$

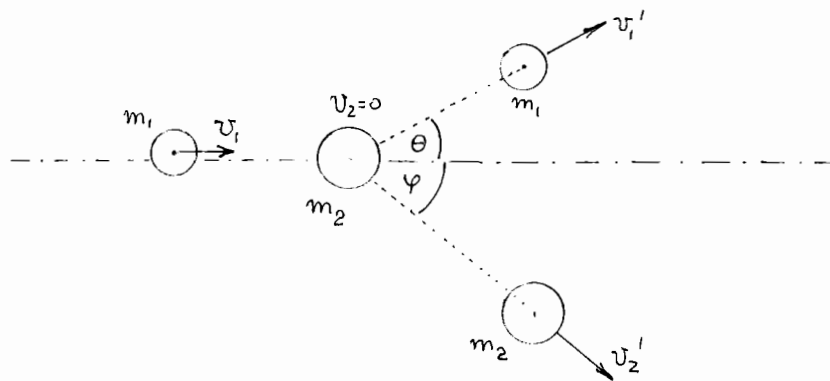
Es lo que ocurre con una pelota lanzada perpendicularmente contra un muro: rebota con velocidad de igual magnitud que la incidente y de sentido contrario.

Nota: Las ecuaciones (7) y (8) así como las (9) y (10) están escritas para el caso en que v_1 y v_2 tienen el mismo sentido positivo. Si por ejemplo la esfera m_2 se moviera en sentido contrario a la m_1 , es decir, fuera a su encuentro, entonces el signo de v_2 debe tomarse como negativo.

Impacto de dos discos

Sean dos discos de masas m_1 y m_2 sobre un plano liso.

Si m_2 está en reposo y sobre él incide m_1 con velocidad v_i en dirección ligeramente desviada del centro de m_2 (parámetro de impacto), el movimiento de ambos discos luego del choque será en dos dimensiones.



Conservación de la cantidad de movimiento :

$$x: m_1 v_i + 0 = m_1 v_1' \cos \theta + m_2 v_2' \cos \varphi \quad (1)$$

$$y: 0 + 0 = m_1 v_1' \sin \theta - m_2 v_2' \sin \varphi \quad (2)$$

Si además la colisión es elástica, se conserva la energía mecánica del sistema.

$$\frac{1}{2} m_1 v_i^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (3)$$

Si se conocen las masas y la velocidad inicial v_i tenemos entonces cuatro incógnitas: θ , φ , v_1' y v_2' y tan solo tres ecuaciones.

Para resolver totalmente el sistema se debería tomar la precaución de medir uno de los ángulos, quedando así solo 3 incógnitas.

Ahora bien, si las masas fueran iguales ($m_1 = m_2$), y medido el ángulo θ , las ecuaciones quedan:

$$v_i = v_1' \cos \theta + v_2' \cos \varphi$$

$$0 = v_1' \sin \theta - v_2' \sin \varphi$$

$$v_i^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

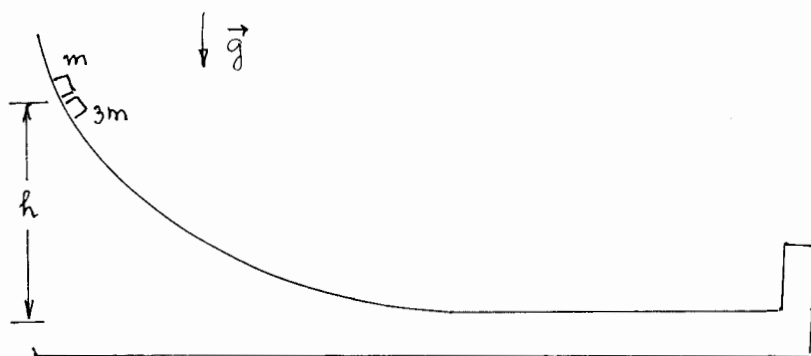
cuya solución conduce a los valores de v_1' y v_2' , encontrándose además que

$$\theta + \varphi = \pi/2$$

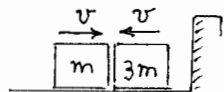
Ejemplos.

1. Sobre una rampa fija con un tramo horizontal que remata en un tope se encuentran dos masas $3m$ y m respectivamente a la altura h . En un cierto instante t_0 se sueltan ambas masas con una pequeña diferencia de tiempo entre ellas de modo que deslizen guardando una pequeña separación.

Suponiendo los choques elásticos determinar la altura máxima a que llega a que llega m en su ascenso por la rampa luego del primer choque con $3m$. Llamando t_1 al instante en que esto ocurre, verificar que la energía mecánica total es la misma.



- a) m y $3m$ llegan al plano con velocidades iguales $v = \sqrt{2gh}$
 b) $3m$ rebota en el tope, devolviéndose con velocidad $-v$.
 c) $3m$ se encuentra de inmediato con m y chocan muy cerca del tope



$$\therefore \quad m v - (3m) v = m v' + (3m) v' \quad (1) \quad \text{Conservación del momento lineal en el choque c)}$$

$$m v^2 + (3m) v^2 = m v'^2 + (3m) v'^2 \quad (2) \quad \text{Conservación energía cinética en el choque}$$

$$\text{De (2): } m(v^2 - v'^2) = -3m(v^2 - v'^2)$$

$$\text{o} \quad m(v + v')(v - v') = -3m(v + v')(v - v') \quad (3)$$

$$\text{De (1)} \quad m(v-v') = 3m(v+v') \quad (4)$$

$$\text{Dividiendo (3) } \div (4) \Rightarrow v+v' = -(v-v') \Rightarrow \boxed{v' = 2v+v'} \quad (5)$$

$$\text{Ahora, de (5) y (1):} \quad mv - 3mv = mv' + 3m \cdot 2v + 3mv'$$

$$v - 8v = 4v'$$

$$\therefore \boxed{v' = -2v} \quad (6) \quad \text{y} \quad \boxed{v' = 0} \quad (7)$$

Se observa que como resultado del primer choque entre las partículas, la $3m$ queda detenida.

La conservación de la energía mecánica para la masa m permite escribir luego:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh$$

$$\text{o sea,} \quad \frac{1}{2} \cancel{m} 4v^2 = \cancel{m} gh$$

$$\text{pero } v = \sqrt{2gh}, \text{ luego, } \frac{1}{2} 4 \cdot 2gh = gh \Rightarrow \boxed{H = 4h} !!$$

Finalmente,

$$E(t_1) = mg \cdot 4h$$

$$E(t_0) = mgh + (3m)gh = 4mgh$$

$$\therefore E(t_1) = E(t_0) \quad \text{la energía es la misma.}$$

2. Un sujeto, de masa M , desliza con velocidad V_0 sobre una superficie horizontal lisa en dirección a una pared contra la que se estrellará. Intentando aminorar la velocidad para disminuir o evitar el choque, cuando se encuentra a una distancia apropiada arroja horizontalmente contra la pared una pelota de masa m que lleva consigo, con velocidad V_0 relativa a él. La pelota rebota elásticamente, de modo que el sujeto alcanza a atraparla antes de estrellarse

- Determinar la velocidad con que se estrellará
- Determinar el valor mínimo de V_0 para evitar el choque.

1. Conservación de la cantidad de movimiento del sistema en el acto de arrojarla:

$$(M+m)V_0 = MV' + mV'$$

$$\therefore (M+m)V_0 = MV' + m(V' + V_0) \quad (1)$$

V' = velocidad del sujeto después de arrojar la pelota

V' = velocidad de la pelota

$$V' - V' = V_0 \Rightarrow \boxed{V' = V' + V_0}$$

2. Pelota choca con el muro con velocidad $(V' + V_0)$ y se devuelve con $-(V' + V_0)$. (choque elástico)

3. Conservación de la cantidad de movimiento del sistema en el acto de atrapar la pelota:

$$MV' - m(V' + V_0) = (M+m)V'' \quad (2)$$

V'' : velocidad de choque contra la pared.

4. Solución del sistema de ecuaciones (1) y (2); Como interesa V'' , basta eliminar V' , obteniéndose:

$$\boxed{V'' = \frac{M-m}{M+m} V_0 - \frac{2Mm}{(M+m)^2} V_0}$$

(a) Velocidad con que se estrellará

- b) La condición para que no se estrellé es $V'' = 0$ (sistema queda en reposo)

$$\therefore (M - m^2)V_0 = 2MmV_0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{(M^2 - m^2)}{2Mm} V_0}$$