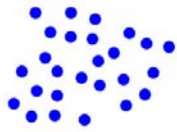


### SISTEMA DE PARTICULAS



$N$  partículas

CENTRO DE MASA 
$$\vec{x}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i$$

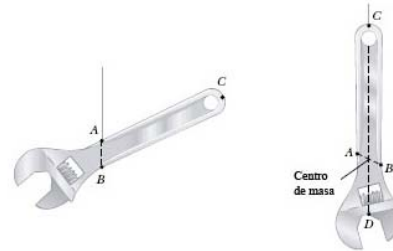
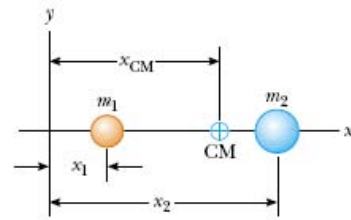
CON  $M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{masa total del sistema}$

LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{\Delta \vec{x}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\Delta \vec{x}_i}{\Delta t}$$

$\uparrow$   
 $m_i = \text{cte} \Rightarrow M = \text{cte}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$



285

EQUIVALENTEMENTE

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{p}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

LA ACCELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR

$$\vec{a}_{CM} \equiv \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

DONDE  $\vec{F}_i$  ES LA FUERZA TOTAL QUE ACTÚA SOBRE LA PARTÍCULA  $i$ -ÉSIMA

286

$\vec{F}_i$  incluye todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula  $i$ -ésima así como también la suma de las fuerzas internas que las otras partículas ejercen sobre la partícula  $i$ -ésima

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}$$

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \left\{ \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{21} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \right\}$$

287

Si las fuerzas entre partículas satisfacen la 3ª ley de Newton (por ejemplo, fuerzas de contacto, fzas. gravitacionales) se tiene que

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

fza. que ejerce la partícula  $j$  sobre la partícula  $i$ -ésima = fza. que ejerce la partícula  $i$  sobre la partícula  $j$ -ésima

Entonces

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \left\{ \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_0 + \underbrace{\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}}_0 + \dots \right\} \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$



288

### MOMENTUM LINEAL DEL SISTEMA

$$\vec{P}_{TOTAL} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N$$

$$\vec{P}_{TOTAL} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{P}_{TOTAL} = M \vec{v}_{CM}}$$

EL MOMENTUM LINEAL TOTAL DEL SISTEMA ES IGUAL A LA VELOCIDAD DEL CM POR LA MASA TOTAL DEL SISTEMA

$$\frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = M \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = M \vec{a}_{CM}$$

$$\frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte$$

289

Si  $M = cte \Rightarrow$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

Si LA FUERZA EXTERNA TOTAL ES CERO

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

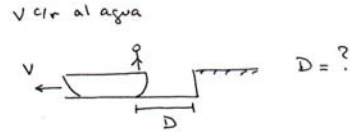
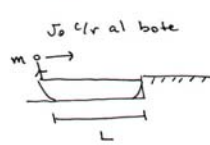
POR LO TANTO, EL CENTRO DE MASA SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE.

EL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS PUEDE SER ANALIZADO USANDO LAS LEYES DE NEWTON COMO SI TODA LA MASA ESTUVIERA CONCENTRADA EN EL CENTRO DE MASA Y LA FUERZA TOTAL (SUMA DE LAS FUERZAS EXTERNAS) ESTUVIERA APLICADA EN ESE PUNTO (EL CUAL PUEDE NO COINCIDIR CON UNA PARTÍCULA DEL SISTEMA)



290

### EJEMPLO



$P_{cm} = 0$  (DESPRECIAMOS LA FRA. DE ARRASTRE DEL AGUA)

$$P_{cm} = m(J_0 - V) - MV = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{m}{M+m} J_0 = \text{cte}$$

ENTONCES

$$D = VT$$

DONDE T ES EL TIEMPO QUE  
DEMORA EL PESCADOR EN RECORRER

$$\text{EL LARGO DEL BOTE } T = \frac{L}{J_0}$$

$$\therefore D = \frac{m}{M+m} J_0 \cdot \frac{L}{J_0} = \frac{m}{M+m} \cdot L \quad \leftarrow \text{NO DEPENDE DE } J_0$$

291

### EJEMPLO



DOS BLOQUES INICIALMENTE EN  
REPOSO ESTÁN UNIDOS POR UN  
RESORTE COMPRIMIDO

¿CUÁL ES LA FRACCIÓN DE ENERGÍA CINÉTICA DE CADA  
UNO DE LOS BLOQUES DESPUÉS QUE SE SUELTAN?

$$P_i = 0 \quad P_f = m_1 J_1 - m_2 J_2$$

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 J_1 - m_2 J_2 = 0 \Rightarrow m_1 J_1 = m_2 J_2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE CADA BLOQUE

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 J_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 J_2^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 J_1^2 + \frac{1}{2} m_2 J_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 J_1^2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{J_2^2}{J_1^2} \right\}$$

292

PERO  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2}$  ENTONCES

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right\}$$

$$T = T_1 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \Rightarrow f_1 = \frac{T_1}{T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

ANALOGAMENTE

$$T = T_2 \left\{ 1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1^2}{v_2^2} \right\}$$

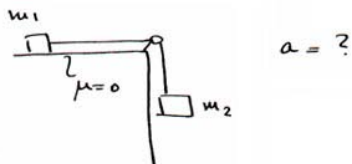
$$\text{PERO } \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow T = T_2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right)$$

$$\therefore f_2 = \frac{T_2}{T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

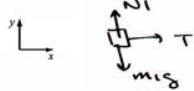
EL BLOQUE DE MASA MAJOR RECIBE MENOS ENERGÍA CINÉTICA QUE EL DE MENOR MASA

293

Ejemplo



Fzas :



$$y) \quad N_1 - m_1 g = 0$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$

$$x) \quad T = m_1 a$$

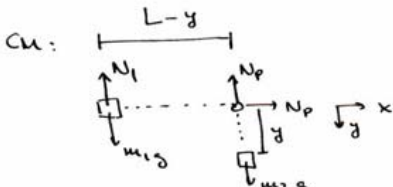
$$\Rightarrow m_1 a - m_2 g = -m_2 a$$

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g$$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

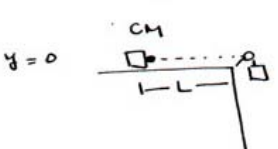
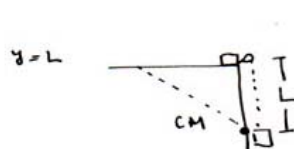
294

CM:



$$x_{CM} = -\frac{m_1}{M}(L-y)$$

$$y_{CM} = \frac{m_2}{M}y \quad M = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow a_{CMx} = \frac{m_1}{M}a \quad a_{CMy} = \frac{m_2}{M}a$$

295

Ec. de Newton para el CM

x)  $N_p = M a_{CMx} = m_1 a$

y)  $m_1 g - N_1 + m_2 g - N_p = M a_{CMy} = m_2 a$

$$\Rightarrow m_1 g - N_1 + m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

pero  $N_1 = m_1 g$

$$\Rightarrow a(m_1 + m_2) = m_2 g$$

$$a = \frac{m_2}{M}g$$

Posición CM

$$x_{CM} = -\frac{m_1}{M}L + \frac{m_1}{M}y \quad y_{CM} = \frac{m_2}{M}y$$

296

pero  $y = \frac{1}{2}at^2$  entonces

$$x_{cm} = -\frac{m_1}{M}L + \frac{m_1}{M}\frac{1}{2}at^2$$

$$y_{cm} = \frac{m_2}{M}\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = \frac{M}{m_2}y_{cm}$$

$$\Rightarrow x_{cm} = -\frac{m_1}{M}L + \frac{m_1}{M}\frac{M}{m_2}y_{cm}$$

$$y_{cm} = \frac{m_2}{m_1} \left[ x_{cm} + \frac{m_1}{M}L \right]$$

en  $t=0$   $x_{cm} = -\frac{m_1}{M}L \Rightarrow y_{cm} = 0$

al final  $x_{cm} = 0 \Rightarrow y_{cm} = \frac{m_2}{M}L$

