

Conservación de momentum lineal

Un karateca experto se entrena para aumentar la fortaleza de sus músculos y engrosar los huesos de sus manos. Esto le permite quebrar varios pastelones de concreto de un solo golpe. Aunque un karateca novato no puede realizar esta hazaña, si puede quebrar fácilmente una pila de tablas de madera. En la foto, Tom Casiani, un estudiante del Dickinson College, quiebra nueve tablas de $\frac{3}{4}$ " a pesar de que nunca ha practicado kárate antes de estudiar física.



¿Cómo pudo quebrar las tablas sin dañar su mano?



261

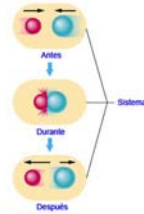
CHOQUES (EXPLOSIONES)

UN CHOQUE (EXPLOSIÓN) ES UN EVENTO AISLADO EN EL CUAL DOS O MAS CUERPOS EJERCEN FUERTAS ENTRE SI RELATIVAMENTE FUERTES EN UN INTERVALO DE TIEMPO CORTO COMPARADO CON EL TIEMPO QUE DURA SU MOVIMIENTO TOTAL

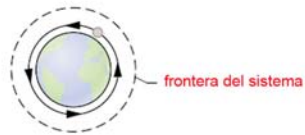


262

PARA ANALIZAR EL CHOQUE
SE DISTINGUEN 3 FASES



UN SISTEMA AISLADO ES UNA COLECCIÓN DE PARTÍCULAS
QUE PUEDEN INTERACTUAR UNAS CON OTRAS PERO CUYA
INTERACCIÓN CON EL MEDIO EXTERIOR TIENE UN EFECTO
DESPRECIABLE SOBRE SUS MOMENTOS



263

MOMENTUM PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

CONSIDEREMOS UN SISTEMA DE N PARTÍCULAS DE MASA m_i
QUE SE MUEVEN CON VELOCIDAD \vec{v}_i . EL MOMENTUM TOTAL
DEL SISTEMA ES

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$$

ENTONCES

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt}$$

APLICANDO LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA CADA
PARTÍCULA

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \vec{F}_1^{\text{neta}} + \vec{F}_2^{\text{neta}} + \dots + \vec{F}_N^{\text{neta}}$$

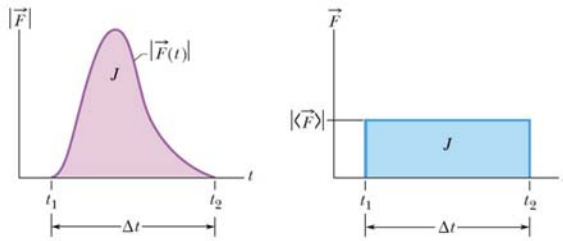
POR LO TANTO

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \vec{F}_{\text{sistema}}^{\text{neta}}$$

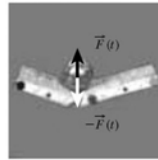
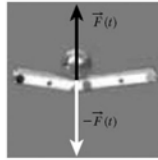
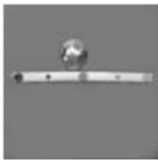
INCLUYE TODAS LAS FUERZAS
EXTERNAS E INTERNAS QUE
ACTÚAN SOBRE EL SISTEMA

264

IMPULSO Y CAMBIO DE MOMENTUM



$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{net}}(t) dt = \langle \vec{F}_{\text{net}} \rangle \Delta t$$



265

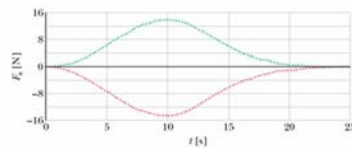
CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

EN UN SISTEMA AISLADO $\vec{F}_{\text{net}} = 0$, POR LO TANTO

$$\frac{d\vec{P}_{\text{sistema}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{\text{sistema}} = \text{cte}$$

ES DECIR, EL MOMENTUM LINEAL TOTAL ES CONSERVADO

LAS PARTICULAS PUEDEN CAMBIAR SU MOMENTUM PERO LO HACEN DE MANERA TAL QUE EL MOMENTUM TOTAL ES CONSTANTE



266

CHOQUES

CHOQUE ELÁSTICO → CONSERVACIÓN DE ENERGÍA
→ CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

CHOQUE INELÁSTICO → CONSERVACIÓN DE MOMENTUM
→ NO SE CONSERVA LA ENERGÍA

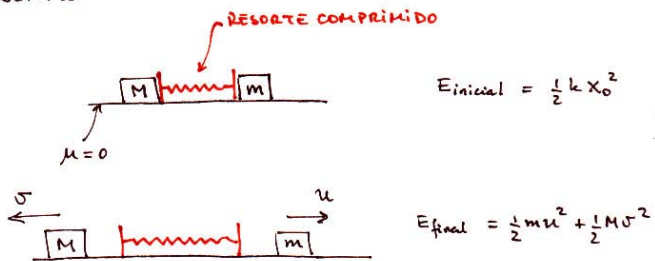
CONSERVACIÓN DE MOMENTUM PROVIENE DE LA 2ª Y 3ª
LEYES DE NEWTON



267

CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

EJEMPLO



$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

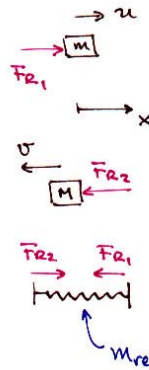
CONS. DE ENERGÍA $\Rightarrow E_i = E_f$

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

¡DOS INCÓGNITAS u Y v PERO SÓLO UNA ECUACIÓN!

268

SIN EMBARGO, USANDO LA 2ª Y 3ª LEY DE NEWTON PARA AMBAS MASAS Y EL RESORTE SE TIENE



$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = F_{R1} \quad (1)$$

$$-M \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{R2} \quad (2)$$

$$0 = F_{R2} - F_{R1}$$

$$\Rightarrow F_{R2} = F_{R1}$$

$m_{\text{resorte}} = 0$

269

ENTONCES DE (1) Y (2) SE TIENE

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = M \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$m \Delta u = M \Delta v$$

$$m(u_f - u_i) = M(v_f - v_i)$$

$$mu_f - Mv_f = mu_i - Mv_i$$

$$\Rightarrow \boxed{mu - Mv = \text{CONSTANTE}} \quad \text{CONSERVACIÓN DE MOMENTUM}$$

USANDO VECTORES, ESTA LEY DE CONSERVACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR

$$\vec{mu} + M\vec{v} = \text{cte.}$$

LA LEY DE CONSERVACIÓN DE MOMENTUM ES VÁLIDA SIEMPRE QUE NO EXISTAN FUERZAS EXTERNAS ACTUANDO SOBRE EL SISTEMA.

270

EN GENERAL, LA LEY DE CONSERVACIÓN DE MOMENTUM
ESTÁ DADA POR

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{cte.}$$

VOLVAMOS A NUESTRO PROBLEMA, AHORA TENEMOS
DOS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m u^2$$

$$m u - M v = 0 \Rightarrow u = \frac{M}{m} v$$

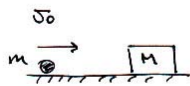
ENTONCES

$$k x_0^2 = M v^2 + m \left(\frac{M v}{m} \right)^2$$

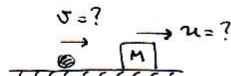
$$v = x_0 \sqrt{\frac{k m}{M(m+M)}} \Rightarrow u = x_0 \sqrt{\frac{k M}{m(m+M)}}$$

271

EJEMPLO CHOQUE ELÁSTICO



ANTES



DESPUÉS

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M u^2$$

$$p_{\text{inicial}} = m v_0$$

$$p_{\text{final}} = m v + M u$$

$$p_i = p_f \Rightarrow m v_0 = m v + M u$$

$$v = v_0 - \frac{M}{m} u$$

272

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(v_0 - \frac{M}{m} u \right)^2 + \frac{1}{2} M u^2$$

$$m \cancel{v_0^2} = m \left(\cancel{v_0^2} - 2 \frac{M}{m} u v_0 + \frac{M^2}{m^2} u^2 \right) + M u^2$$

$$0 = M u^2 - 2 M v_0 u + \frac{M^2}{m} u^2$$

$$0 = u \left[\left(1 + \frac{M}{m} \right) u - 2 v_0 \right]$$

$$u \neq 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{M}{m} \right) u = 2 v_0$$

$$u = \frac{2 v_0}{1 + M/m}$$

ENTONCES

$$v = v_0 - \frac{M}{m} \frac{2 v_0}{1 + M/m} \Rightarrow v = v_0 \left(\frac{1 - M/m}{1 + M/m} \right)$$

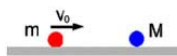
$$\text{Si } M = m \Rightarrow v = 0 \text{ y } u = v_0$$

273

CHOQUE COMPLETAMENTE INELÁSTICO

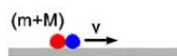
EJEMPLO

ANTES



$$p_{\text{inicial}} = m v_0$$

DESPUÉS



$$p_{\text{final}} = (m+M) v$$

$$p_i = p_f \Rightarrow m v_0 = (m+M) v$$

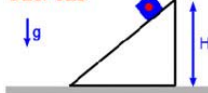
$$v = \frac{m}{m+M} v_0$$

OTRO EJEMPLO

ANTES



DESPUÉS



DETERMINAR v_0 PARA QUE EL BLOQUE + BALA ALCANCEN UNA ALTURA H

274

CHOQUE COMPLETAMENTE INELÁSTICO \Rightarrow $\underbrace{P_i}_{m\vec{v}_0} = \underbrace{P_f}_{(m+M)\vec{v}}$
$$\vec{v} = \frac{m}{M+m} \vec{v}_0$$

DESPUÉS DEL CHOQUE

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} (m+M) \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2$$

$$E_{\text{final}} = (m+M) g H$$

CONS. DE ENERGÍA $\Rightarrow E_i = E_f$

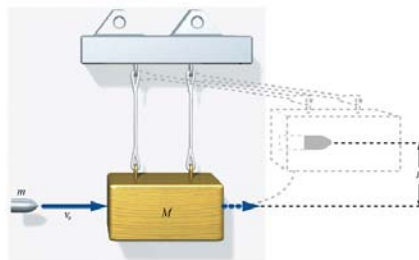
$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2 = (m+M) g H$$

$$v_0^2 = 2 g H \frac{(m+M)^2}{m^2}$$

$$v_0 = \left(\frac{M+m}{m} \right) \sqrt{2 g H}$$

275

PÉNDULO BALÍSTICO



DETERMINAR v_0 PARA QUE EL BLOQUE SUBA HASTA UNA ALTURA H

CONS. DE MOMENTUM $m v_0 = (m+M) v$

$$v = \frac{m}{M+m} v_0$$

DESPUÉS DEL CHOQUE, EL PÉNDULO CONSERVA ENERGÍA

$$\frac{1}{2} \cancel{(m+M)} v^2 = \cancel{(M+m)} g H$$

$$v = \sqrt{2 g H} \Rightarrow v_0 = \left(\frac{M+m}{m} \right) \sqrt{2 g H}$$

276

CHOQUE ELÁSTICO : CASO GENERAL



$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\text{COLISIÓN ELÁSTICA} \Rightarrow P_i = P_f \quad E_i = E_f$$

CONS. DE MOMENTUM



$$m_1 a_1 = -R$$

$$m_2 a_2 = R$$

DURANTE EL
CHOQUE

$$\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

277

PERO $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ENTONCES

$$m_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = 0$$

$$m_1 (v_{1f} - v_{1i}) + m_2 (v_{2f} - v_{2i}) = 0$$

$$\underbrace{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}_{P_i} = \underbrace{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}_{P_f}$$

VOLVIENDO A NUESTRO PROBLEMA

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad (*)$$

$$E_i = E_f \Rightarrow m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

278

USANDO ④ SE TIENE

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = - (v_{1f} - v_{2f})$$

VELOCIDAD
RELATIVA DE
ACERCAMIENTO
ANTES DEL CHOQUE

VELOCIDAD
RELATIVA
DESPUÉS DEL CHOQUE

USANDO ESTA ECUACIÓN Y ④ SE PUEDE OBTENER v_{1f}
Y v_{2f} EN TÉRMINOS DE LAS VELOCIDADES INICIALES

$$v_{1i} - v_{2i} = - (v_{1f} - v_{2f})$$

$$\Rightarrow v_{2f} = v_{1i} - v_{2i} + v_{1f}$$

REEMPLAZANDO EN ④

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{1i} - v_{2i} + v_{1f} - v_{2i})$$

$$m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} + 2m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{1f}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

279

ANALOGAMENTE

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

CASOS ESPECIALES

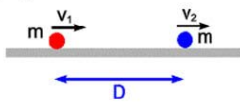
$$\text{i) } m_1 = m_2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{array} \right\} \text{ LAS PARTÍCULAS} \\ \text{INTERCAMBIAN} \\ \text{VELOCIDADES}$$

$$\text{ii) } v_{2i} = 0 \Rightarrow v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

280

CHOQUE DE 2 MASAS IDÉNTICAS EN 1-DIM

$t=0$



$$x_1(t) = v_1 t$$

$$x_2(t) = D + v_2 t$$

COLISIÓN $\Rightarrow x_1(t_c) = x_2(t_c)$

$$v_1 t_c = D + v_2 t_c$$

$$t_c = \frac{D}{v_1 - v_2}$$

LA COLISIÓN OCURRE SI $t_c \geq 0 \Rightarrow v_1 > v_2$

SI $v_1 = v_2 \Rightarrow t_c \rightarrow \infty$ i.e. LA COLISIÓN NUNCA OCURRE

PUNTO DE COLISIÓN: $x_c = x_1(t_c) = x_2(t_c)$

$$\Rightarrow x_c = \frac{v_1 D}{v_1 - v_2}$$

281

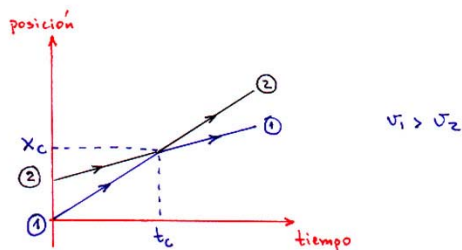
VELOCIDADES DESPUÉS DEL CHOQUE:

$$v_{1f} = v_2$$

$$v_{2f} = v_1$$

\Rightarrow LAS VELOCIDADES SE INTERCAMBIAN \Rightarrow LAS PARTÍCULAS PARECEN TRASPASARSE

ANÁLISIS GRÁFICO



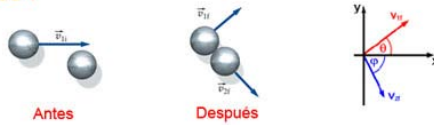
282

COLISIONES EN 2D Y 3D

CHOQUE ELÁSTICO $\Rightarrow E_i = E_f$ y $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

CHOQUE INELÁSTICO $\Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$

EJEMPLO:



CHOQUE ELÁSTICO

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \begin{aligned} x) \quad m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \varphi \\ y) \quad 0 &= m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \varphi \end{aligned}$$

¡¡ TENEMOS 4 INCÓGNITAS ($\theta, \varphi, v_{1f}, v_{2f}$) PERO SÓLO 3 ECUACIONES !!

\Rightarrow HAY QUE MEDIR ALGUNA DE ESTAS CANTIDADES

283

POR EJEMPLO, SUPONGAMOS QUE v_{1f} ES CONOCIDA.

ENTONCES

$$m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} \cos \theta = m_2 v_{2f} \cos \varphi$$

$$m_1 v_{1f} \sin \theta = m_2 v_{2f} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 v_{1f} \sin \theta}{m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} \cos \theta} = \frac{m_2 v_{2f} \sin \varphi}{m_2 v_{2f} \cos \varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{v_{1f} \sin \theta}{v_{1i} - v_{1f} \cos \theta}$$

284