

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL



¿TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA PARA LLEVAR UNA MASA m DESDE r_A HASTA r_B ?

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{gravedad}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

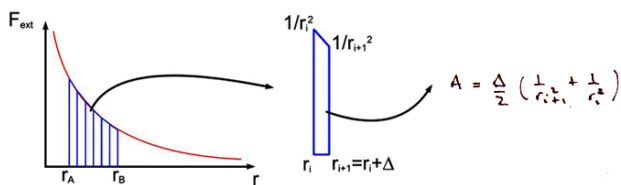
SI TRASLADAMOS LA PARTÍCULA RADIALMENTE DESDE A HASTA B, LA FUERZA \vec{F} Y EL DESPLAZAMIENTO $\Delta \vec{r}$ APUNTARÁN SIEMPRE EN LA MISMA DIRECCIÓN, ENTONCES

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = GMm \sum_{r_A}^{r_B} \frac{\Delta r_i}{r_i^2}$$

$$W_{A \rightarrow B} = GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

235

GRÁFICAMENTE SE TIENE



$$A = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right)$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[r_i (r_i + \Delta)^{-1} + \frac{(r_i + \Delta)}{r_i} \right]$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right) \right]$$

$$\Delta \rightarrow 0 \quad = \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[1 - \frac{\Delta}{r_i} + 1 + \frac{\Delta}{r_i} \right]$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{\Delta}{r_i r_{i+1}}$$

236

$$\text{ÁREA TRAPEZOIDAL} = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i r_{i+1}} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}$$

$$\text{POR LO TANTO } W_{A \rightarrow B} = G M m \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$$

$$\text{DONDE } r_1 \equiv r_A \text{ Y } r_{N+1} \equiv r_B$$

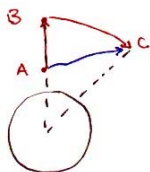
$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = G M m \left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_B} \right) \right]$$

$$\therefore W_{A \rightarrow B} = G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA EXTERNA PARA MOVER LA MASA m DESDE r_A HASTA r_B EN CONTRA DE LA ATRACCIÓN GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

237

EL TRABAJO PARA MOVER LA MASA m DESDE A HASTA C NO DEPENDE DE LA TRAYECTORIA SÓLO DEPENDE DE LA POSICIÓN INICIAL Y FINAL



$$r_B = r_C$$

$$W_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$$

POQUE EL DESPLAZAMIENTO ES PERPENDICULAR A LA FUERZA GRAVITACIONAL

LA FUERZA DE GRAVEDAD ES UNA FUERZA CONSERVATIVA



238

SE DEFINE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL POR

$$\Delta U = -W_{\text{grav}} = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_{\text{grav}} \cdot d\vec{r}$$

PERO $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{grav}}$ ENTONCES

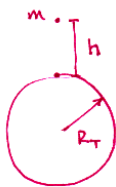
$$\Delta U = W_{A \rightarrow B} = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$U_B - U_A = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = - \frac{GMm}{r}} \quad \text{ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL}$$

239

VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CERCA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE



$$\Delta U = -GMm \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

$$\Delta U = - \frac{GMm}{R_T} \left(\frac{R_T}{R_T + h} - 1 \right)$$

$$\Delta U = - \frac{GMm}{R_T} \left(\frac{1}{1 + h/R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx - \frac{GMm}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx m \left(\frac{GM}{R_T^2} \right) h = mgh$$

$g = \text{gravedad en la superficie de la Tierra}$

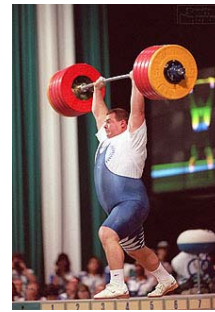
240

Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chemerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



241

CHEMERKIN LEVANTÓ UNA MASA TOTAL $m = 260 \text{ kg}$
 HASTA UNA ALTURA $h = 2 \text{ m}$
 TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD

$$W_{\text{grav}} = -mgh = - (2548 \text{ N}) (2.0 \text{ m})$$

$$W_{\text{grav}} = -5100 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = 5100 \text{ J}$$

POR OTRO LADO, ANDERSON EFECTUÓ UN TRABAJO
 DADO POR

$$W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = mg \Delta y$$

$$W_{\text{aplicado}} = (27900 \text{ N}) (0.01 \text{ m}) = 280 \text{ J}$$

ANDERSON NECESITÓ APLICAR UNA GRAN FUERZA PARA
 LEVANTAR LA PLATAFORMA PERO ENLEÓ SOLO UNA
 PEQUEÑA CANTIDAD DE ENERGÍA.

242

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

SI EN UN SISTEMA ACTÚAN SÓLO FUERZAS CONSERVATIVAS

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -W_{\text{TOTAL}}$$

POR EL TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

(CON $K = \frac{1}{2}mv^2$ (ENERGÍA CINÉTICA))

ENTONCES

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -\Delta K$$

$$U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right)$$

$$U_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = U_f + \frac{1}{2}mv_f^2$$

243

SE DEFINE LA ENERGÍA MECÁNICA POR

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

POR LO TANTO $E_f = E_i$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = 0} \quad \text{CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA}$$

SI ADEMÁS EN EL SISTEMA ACTÚAN OTRAS FUERZAS NO-CONSERVATIVAS (EJ. ROCE) SE TIENE

$$W_{\text{TOTAL}} = W_{\text{FEAS. CONS.}} + W_{\text{OTRAS}}$$

PERO

$$W_{\text{FEAS. CONS.}} = -\Delta U_{\text{FEAS. CONS.}} \quad \leftarrow U \text{ SÓLO SE PUEDE DEFINIR PARA FEAS. CONS.}$$

ADEMÁS

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

244

ENTONCES

$$\Delta K = -\Delta U_{\text{FZAS. CONS.}} + W_{\text{OTRAS}}$$

$\Delta E_{\text{MECÁNICA}}$

$$\Delta(K + U) = W_{\text{OTRAS}}$$

WOTRAS GENERA OTROS TIPOS DE ENERGÍA DISTINTOS A LA ENERGÍA MECÁNICA (ES. ENERGÍA TÉRMICA).

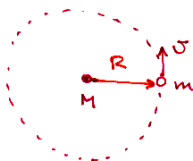
POR LO TANTO

$$\Delta E_{\text{TOTAL}} = \Delta(E_{\text{MEC.}} + E_{\text{OTRAS}}) = 0$$

CONSERVACIÓN DE
LA ENERGÍA

245

PLANETA O SATELITE EN ÓRBITA CIRCULAR



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

PERO EN UNA ÓRBITA CIRCULAR SE TIENE

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

ENTONCES

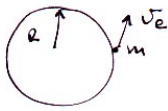
$$E = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R} < 0$$

UNA ÓRBITA SE DICE QUE ESTÁ LIGADA AL CENTRO DE FUERZAS SI SU ENERGÍA TOTAL ES NEGATIVA

ESTE ES EL CASO DE TODOS LOS PLANETAS RESPECTO AL SOL Y DE ALGUNOS COMETAS (AQUELLOS PERIÓDICOS)

246

VELOCIDAD DE ESCAPE



v_e = VELOCIDAD DE ESCAPE
= VELOCIDAD MÍNIMA
PARA ESCAPAR DE LA
ATRACCIÓN GRAVITACIONAL
DE LA TIERRA (U OTRO
PLANETA)

v_e ESTÁ DADO POR LA CONDICIÓN $E = 0$ DONDE

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

\Rightarrow $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ VELOCIDAD
DE
ESCAPE

$v_e = 11.2 \text{ km/s}$ EN LA TIERRA