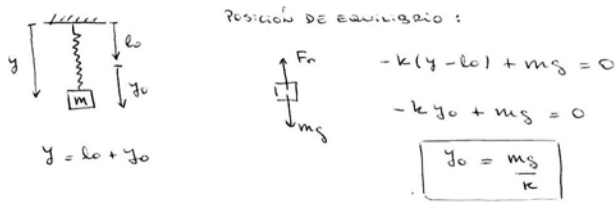


Ejemplo: Oscilador armónico vertical



Ecuación DE MOVIMIENTO:

$$-k y + m g = m \ddot{y}$$

PERO $y = y' + y_0$

$$\Rightarrow -k(y' + y_0) + m g = m \ddot{y}'$$

$$-k y' - k \frac{m g}{k} + m g = m \ddot{y}'$$

$$\therefore -\frac{k}{m} y' = \ddot{y}' \quad \text{MAS}$$

LA SOLUCIÓN DE ESTA ECUACIÓN ES

$$y'(t) = A \cos(\omega t + \psi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{m g}{k} + A \cos(\omega t + \psi)$$

484

TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN ESTE SISTEMA SON CONSERVATIVAS \Rightarrow ENERGÍA MECÁNICA TOTAL ES CTE.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 - m g y$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k (y_0 + y')^2 - m g (y_0 + y')$$

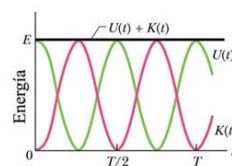
$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + k y_0 y' + \frac{1}{2} k y'^2 - m g y_0 - m g y'$$

PERO $y_0 = \frac{m g}{k} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y'^2 - \frac{1}{2} k y_0^2$$

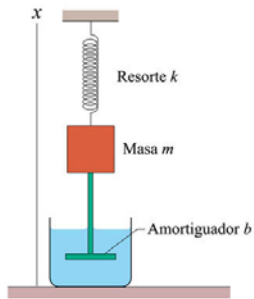
ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

$$E' = E + \frac{1}{2} k y_0^2 = \frac{1}{2} k A^2$$



485

OSCILADOR AMORTIGUADO



$$\vec{F}_{viscosa} = -b\vec{v} \quad (b = \text{cte})$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$$

SEA $x(t) = A e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = i\omega A e^{i\omega t}$
 $\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$

ENTONCES

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} = -\frac{k}{m} A e^{i\omega t} - \frac{b}{m} i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2}{\tau} i\omega = 0$$

CON $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Y $\tau = \frac{2m}{b}$ CONSTANTE DE DECAIMIENTO

486

SEA $\alpha = \omega + i\omega_0 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2 + 2i\omega_0\omega - \omega_0^2$

$$\omega^2 + 2i\omega_0\omega - \omega_0^2 - \omega_0^2 - i\omega \frac{2}{\tau} + \omega_0^2 \frac{2}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 - \omega_0^2 + \omega_0^2 \frac{2}{\tau} = 0$$

$$2\omega_0\omega - \omega \frac{2}{\tau} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

ENTONCES

$$\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2}{\tau^2} = 0$$

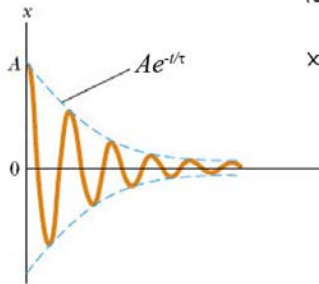
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} e^{i\omega t}$$

487

OSCILADOR AMORTIGUADO



TOMANDO LA PARTE REAL

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

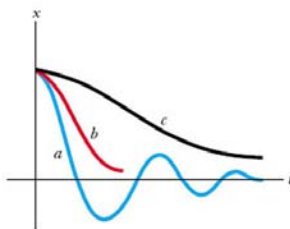
$$\text{CON } \alpha_0 = \frac{1}{2}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}}$$

LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO DECRECE CON EL TIEMPO

488

OSCILADOR CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO



$$\text{SI } \omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t}$$

\Rightarrow EL SISTEMA VUELVE SIN OSCILAR A SU POSICIÓN INICIAL

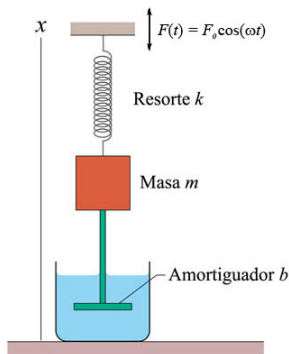
SI $\omega_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow \omega$ ES IMAGINARIO, POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-(\alpha_0 + \omega')t} \quad \text{CON } \omega' = \sqrt{\frac{1}{4} - \omega_0^2}$$

\Rightarrow EL SISTEMA NO OSCILA PERO VUELVE A SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO MÁS LENTAMENTE QUE EN EL CASO AMORTIGUADO CRÍTICO.

489

OSCILACIONES FORZADAS RESONANCIA.



Ec. de movimiento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (*)$$

Sea $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

entonces

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

reemplazando en (*)

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - bA\omega \sin(\omega t + \varphi) + kA \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos \omega t$$

490

expandiendo $\cos(\omega t + \varphi)$ y $\sin(\omega t + \varphi)$ se tiene

$$[-mA\omega^2 \cos \varphi - bA\omega \sin \varphi + kA \cos \varphi - F_0] \cos \omega t + [mA\omega^2 \sin \varphi - bA\omega \cos \varphi - kA \sin \varphi] \sin \omega t = 0$$

esta expresión es válida para todo instante t , por lo tanto

$$-mA\omega^2 \cos \varphi - bA\omega \sin \varphi + kA \cos \varphi - F_0 = 0 \quad (1)$$

$$mA\omega^2 \sin \varphi - bA\omega \cos \varphi - kA \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

De (2) tenemos

$$(m\omega^2 - k) \sin \varphi = b\omega \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (3)$$

donde $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ (frec. natural del resorte)

491

De la ec. (1) se tiene

$$A \left[(k - m\omega^2) \cos\varphi - b\omega \sin\varphi \right] = F_0$$

$$A \cos\varphi \left[m(\omega_0^2 - \omega^2) - b\omega \tan\varphi \right] = F_0$$

usando (3) y la relación $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$ se obtiene

$$A \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}} \left[m(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{b^2\omega^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right] = F_0$$

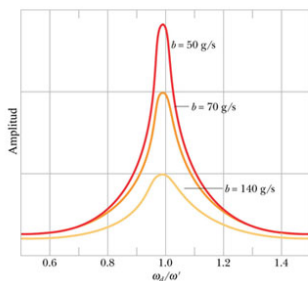
$$A \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\omega^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} \left[\frac{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] = F_0$$

492

$$\Rightarrow A \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} = F_0$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$



493

Ondas mecánicas

Cuando un escarabajo camina sobre la arena a unas pocas decenas de centímetros de un escorpión, éste inmediatamente se vuelve hacia él y corre raudamente para comérselo. El escorpión puede hacer esto incluso de noche, sin ver ni oír al escarabajo.



¿Cómo puede el escorpión detectar con tal precisión a su presa?