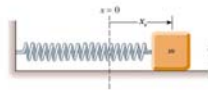


EJEMPLOS

i)



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

EN $t=0$ $x(0) = X_0 = A \cos \phi_0$

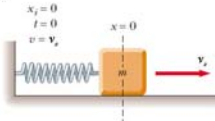
$$v(0) = -A\omega \sin \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = 0$$

$$\Rightarrow A = X_0$$

POR LO TANTO EL DESPLAZAMIENTO DEL BLOQUE ESTÁ DADO POR

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

ii)



EN ESTE CASO, EN $t=0$

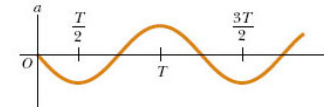
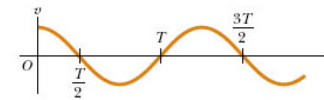
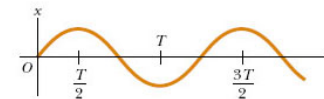
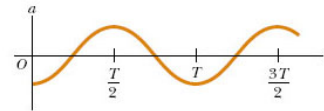
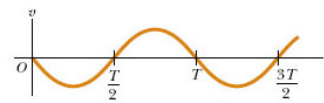
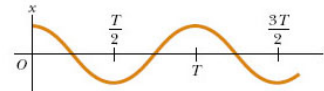
$$x(0) = 0 = A \cos \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$v(0) = v_0 = -A\omega \sin \phi_0$$

$$\Rightarrow \phi_0 = -\frac{\pi}{2} \quad A = \frac{v_0}{\omega}$$

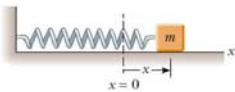
POR LO TANTO

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



479

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



ENERGÍA CINÉTICA

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

ENERGÍA POTENCIAL

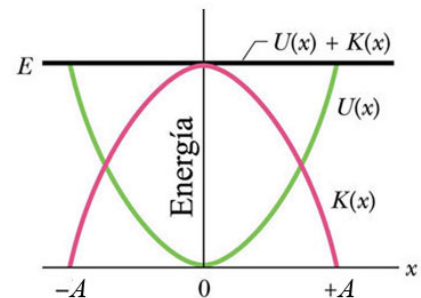
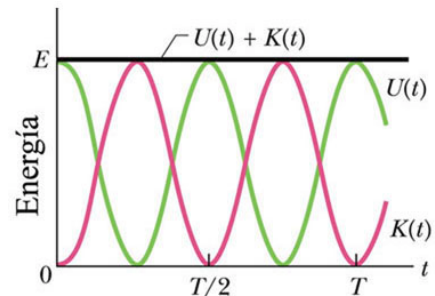
$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

ENERGÍA TOTAL

$$E = K + U = \frac{1}{2} A^2 [m\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + k \cos^2(\omega t + \phi_0)]$$

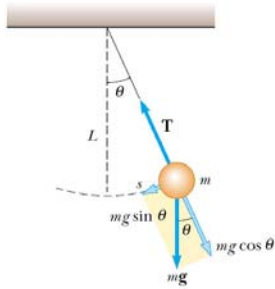
PERO $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ENTONCES $E = \frac{1}{2} k A^2$

LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL DE UN OSCILADOR ARMÓNICO ES CONSTANTE Y PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO



480

PÉNDULO SIMPLE



2ª LEY DE NEWTON

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

PERO $s = L\theta$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

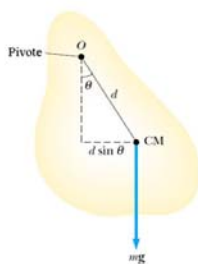
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Si $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ ENTONCES LA EC. DE MOVIMIENTO ES

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta \quad \text{MAS CON } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

481

PÉNDULO FÍSICO



$$\sum \tau = I \ddot{\alpha} \Rightarrow$$

$$-mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

Si $\theta \ll 1 \Rightarrow$

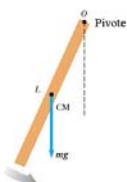
$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I} \theta$$

$$\text{MAS CON } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

I = MOMENTO DE INERCIA
RESPECTO AL PIVOTE

d = DISTANCIA DEL PIVOTE
AL CENTRO DE MASA

EJEMPLO

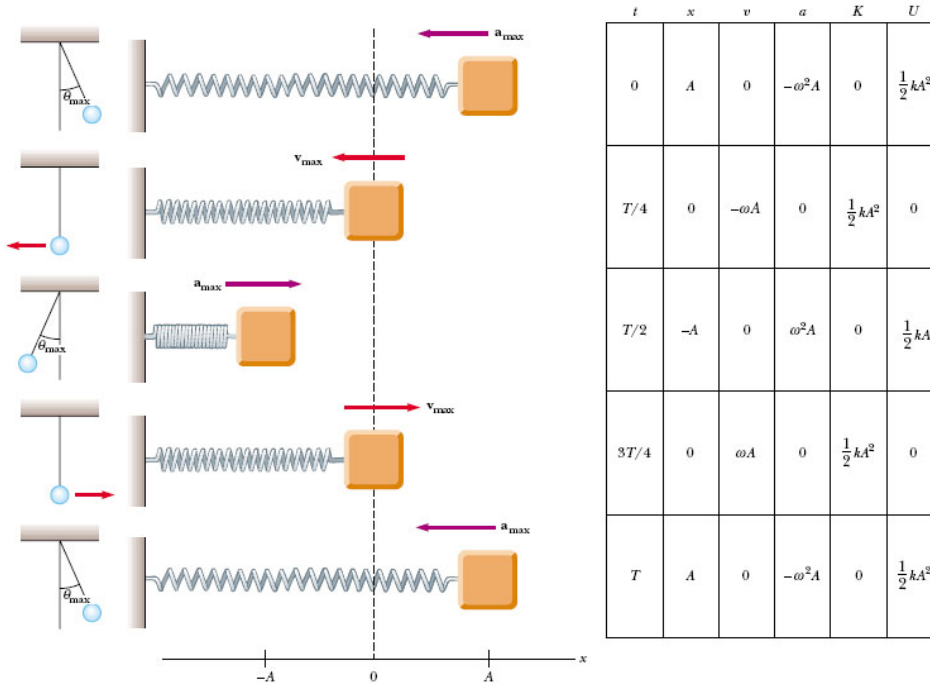


$$\omega^2 = \frac{mgL/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2} \frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

482

PÉNDULO VERSUS OSCILADOR ARMÓNICO



483

OSCILADOR AMORTIGUADO

Resorte k

Masa m

Amortiguador b

$$\vec{F}_{\text{viscosa}} = -b \vec{v} \quad (b = c\eta)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m \ddot{x} = -kx - b \dot{x}$$

SEA $x(t) = A e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = i\omega A e^{i\omega t}$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

ENTONCES

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} = -\frac{k}{m} A e^{i\omega t} - \frac{b}{m} i\omega A e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2}{\tau} i\omega = 0$$

CON $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Y $\tau = \frac{2b}{m}$ CONSTANT DE DECAIMIENTO

484

SEA $\alpha = \omega + i\alpha_0 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2 + 2i\alpha_0\omega - \alpha_0^2$

$$\omega^2 + 2i\alpha_0\omega - \alpha_0^2 - \omega_0^2 - i\omega\frac{2}{\tau} + \alpha_0\frac{2}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2 + \alpha_0\frac{2}{\tau} = 0$$

$$2\alpha_0\omega - \omega\frac{2}{\tau} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\tau}$$

ENTONCES

$$\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2}{\tau^2} = 0$$

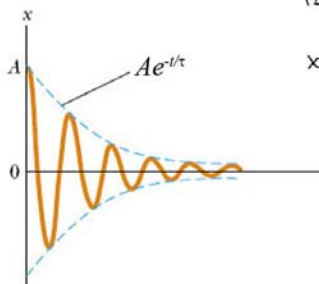
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} e^{i\omega t}$$

485

OSCILADOR AMORTIGUADO



TOMANDO LA PARTE REAL

$$x(t) = A e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

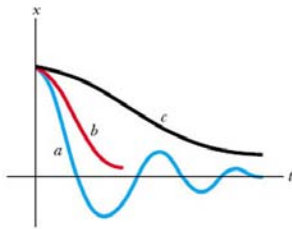
$$\text{con } \alpha_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO DECRECE CON EL TIEMPO

486

OSCILADOR CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO



Si $\omega_0 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$

$$x(t) = A e^{-\omega_0 t}$$

\Rightarrow EL SISTEMA VUELVE SIN OSCILAR A SU POSICIÓN INICIAL

Si $\omega_0 < \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega$ ES IMAGINARIO, POR LO TANTO

$$x(t) = A e^{-(\alpha \pm i\omega')t} \quad \text{CON } \omega' = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$$

\Rightarrow EL SISTEMA NO OSCILA PERO VUELVE A SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO MÁS LENTAMENTE QUE EN EL CASO AMORTIGUADO CRÍTICO.