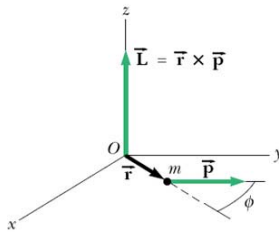


MOMENTO ANGULAR



$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ (momentum lineal)}$$

\vec{r} = posición de la partícula wr al punto O

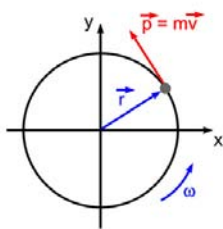
$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$

\vec{L} es perpendicular a \vec{r} y \vec{p}



347

\vec{L} para una partícula en movimiento circular



$$L \equiv |\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = rmv$$

pero $v = \omega r$ entonces

$$L = mr^2\omega \equiv I\omega$$

I es el momento de inercia de una partícula puntal con respecto al eje de rotación

348

MOMENTO ANGULAR DE UNA BARRA RÍGIDA



El momento angular para las N partículas es

$$L = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \omega$$

donde r_n es la posición wr al eje de rotación del n -ésimo pedacito.

r_n corresponde al centro de masa de cada pedazo

$$\Rightarrow r_n = (n - \frac{1}{2}) \Delta \quad n = 1, 2, \dots, N$$

349

Entonces

$$L = \omega m_0 \sum_{n=1}^N \Delta^2 (n - \frac{1}{2})^2$$

$$L = \omega m_0 \Delta^2 \left\{ \sum_{n=1}^N n^2 - \sum_{n=1}^N n + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} \right\}$$

pero $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{6} (2N+1)(N+1)$

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N}{2} (N+1) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^N 1 = N$$

Entonces

$$L = \omega m_0 \Delta^2 \left\{ \frac{N}{6} (2N+1)(N+1) - \frac{N}{2} (N+1) + \frac{N}{4} \right\}$$

350

Tomemos el límite $N \rightarrow \infty$ y $\Delta \rightarrow 0$ con las restricciones:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} N \cdot \Delta = l \equiv \text{largo de la barra}$$

$$\gamma \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m_0 \rightarrow 0}} N \cdot m_0 = M \equiv \text{masa de la barra}$$

Entonces

$$L = \omega (m_0 N) (N \Delta)^2 \left\{ \frac{1}{6} \frac{(2N+1)(N+1)}{N^2} - \frac{(N+1)}{2N^2} + \frac{1}{4N^2} \right\}$$

Tomando el límite se obtiene

$$\boxed{L = \frac{1}{3} M l^2 \omega} \Rightarrow \boxed{L = I \omega}$$

$$I_{\text{barra}} = \frac{1}{3} M l^2 = \text{momento de inercia}$$

351

TORQUE Y MOMENTO ANGULAR

Para una partícula en órbita circular y una barra rotando en torno a un eje, hemos obtenido que el momento angular y la velocidad angular estén relacionados por

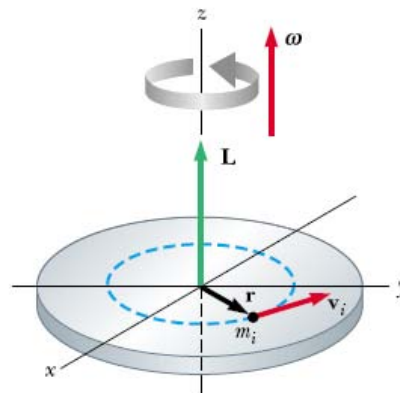
$$L = I \omega$$

donde I es el momento de inercia.

En general, para cualquier cuerpo rotando en torno a un eje fijo se tiene

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I \vec{\omega}$$

donde $\vec{\omega}$ apunta en la dirección perpendicular al plano de rotación y cuyo sentido está dado por la regla de la mano derecha.



352

Si el cuerpo es un sólido rígido y el eje de rotación se mantiene fijo se puede escribir simplemente

$$L = I \omega$$

La variación de momento angular está dada por

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

Si el cuerpo no se deforma $\Rightarrow I = \text{cte}$

Entonces

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha \quad \swarrow \text{aceleración angular}$$

353

pero ya sabemos que $\tau_{\text{total}} = I \alpha$ entonces

$$\frac{dL}{dt} = \tau_{\text{total}}$$

con $\tau_{\text{total}} =$ torque ejercido por todas las fuerzas externas

En general, $\vec{L} = I \vec{\omega}$ pero en un sólido rígido todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular. Por lo tanto podemos calcular $\frac{d\vec{L}}{dt}$ para una partícula y luego sumar todas las partículas.

354

Para una partícula se tiene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

pero $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ y $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

entonces

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

pero \vec{v} y \vec{p} son paralelos $\Rightarrow \vec{v} \times \vec{p} = 0$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

355

Para un sistema de partículas se tiene

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \dots$$


$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots$$

donde $\vec{\tau}_i = \underbrace{\vec{\tau}_i^{\text{fuerzas internas}}}_{= 0 \text{ por 3ª ley de Newton}} + \vec{\tau}_i^{\text{fuerzas externas}}$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_i^{\text{fuerzas ext}} = \vec{\tau}_{\text{total}}$$

356

En resumen, para un cuerpo rígido rotando en torno a un eje fijo se tiene

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I \vec{\omega} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\tau}\end{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$


Si $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$
 $\Rightarrow \vec{\omega} = \text{cte}$

357

MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \sum (\vec{x}_{cm} + \vec{r}_i) \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{x}_{cm} \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_0 = \vec{x}_{cm} \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

pero $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cm}$
 ↑
 velocidad del CM.

$$\vec{L}_0 = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

pero $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{u}_i$
 ↑ ↑
 velocidad de la i-ésima partícula c/r al eje O velocidad de la i-ésima partícula c/r al centro de masa

358

entonces

$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times (\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i) m_i$$

$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{u}_i$$

pero $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ y $m_i \vec{u}_i = \vec{p}_i'$ es el momentum de la i-ésima partícula cr al centro de masa

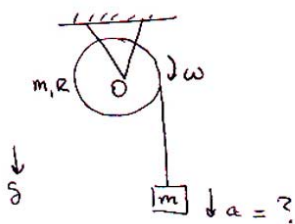
Por lo tanto



$$\vec{L}_O = \vec{x}_{cm} \times M \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{c/r_{cm}}$$

359

EJEMPLO 1



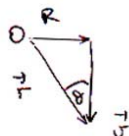
Momento angular cr a O

$$\vec{L}_{TOTAL} = I \vec{\omega} + \vec{r} \times m \vec{v}$$

posición del bloque m cr a O

$\vec{\omega}$ apunta hacia adentro (x)

$\vec{r} \times m \vec{v}$ también apunta hacia adentro (x)



$$\Rightarrow r \sin \theta = R$$

$$\Rightarrow L_{TOTAL} = I \omega + r m v \sin \theta$$

360

$$L_{\text{TOTAL}} = I\omega + mvr$$

Entonces

$$\frac{dL_{\text{TOTAL}}}{dt} = \tau_{\text{ext}} = mgr \sin \theta = mgr$$

$$\Rightarrow mgr = I \frac{d\omega}{dt} + mR \frac{dv}{dt}$$

$$mgr = I\alpha + mRa$$

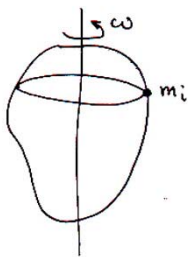
pero $a = \alpha R$, por lo tanto

$$mgr = I \frac{a}{R} + mRa$$

$$a = \frac{2m}{M} \frac{g}{1 + 2m/M}$$

361

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN



Energía cinética partícula i -ésima

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

En un sólido rígido, todas las partículas se mueven en trayectorias circulares

$$\Rightarrow v_i = r_i \omega$$

entonces $K_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

La energía cinética total está dada por

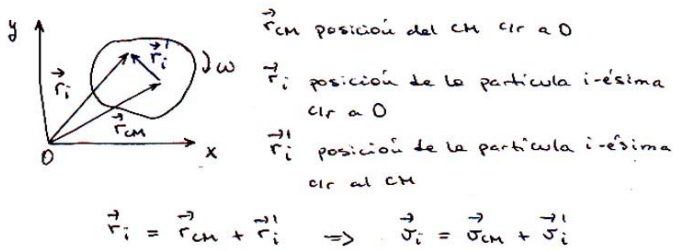
$$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^2}_I \text{ (momento de inercia)}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

362

ROTACIÓN Y TRASLACIÓN DE UN SÓLIDO RÍGIDO



La energía cinética total está dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_{CM}^2 + \underbrace{\vec{v}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i'}_0 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

$$K = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \underbrace{\sum m_i}_M + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

363

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i r_i'^2 \omega^2$$

↑
velocidad angular
respecto a un eje
que pasa por el CM

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i'^2}_{I_{CM \text{ al CM}}}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ es la energía cinética de traslación

$\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ es la energía cinética de rotación
wr al CM

364