

## DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

EL MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO RÍGIDO PUEDE SER DESCOMUESTO EN UN MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DEL CUERPO MAS UNA ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE



EL MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN DEL CUERPO SE REDUCE AL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA, EN DONDE SE CONCENTRAN TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS

298

## Rotaciones

Un jugador de voleibol de playa salta para bloquear un remache. La altura de su salto sería mucho menor si los meniscos no fueran parte de sus piernas.

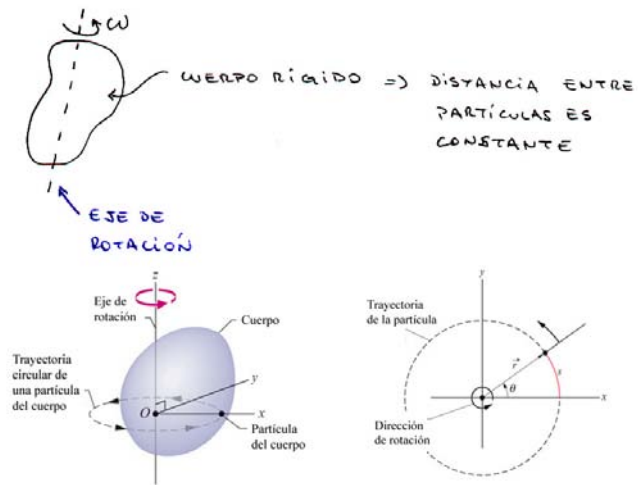


¿Cómo ayudan los meniscos a que la gente salte más alto?

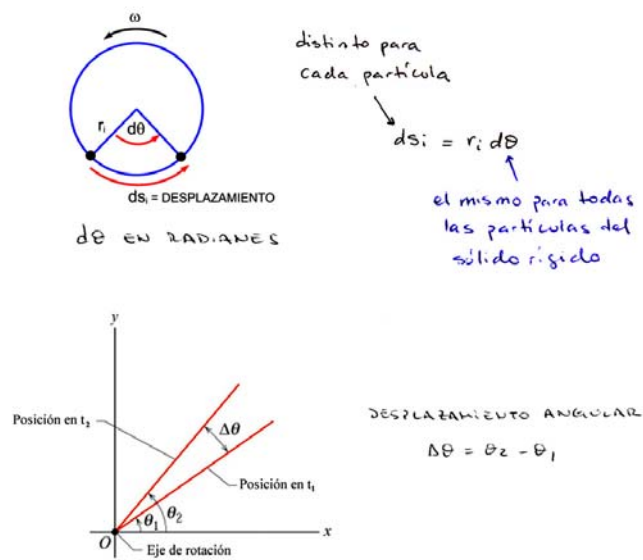


299

## ROTACIÓN EN TORNOS A UN EJE FIJO



300



301

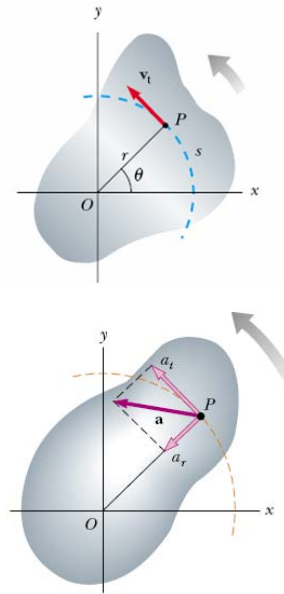
velocidad tangencial  $= \underline{v}_t = \frac{ds}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt} = r_i \omega$

con  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  velocidad angular  $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$

aceleración tangencial  $= a_{t_i} = \frac{dv_{t_i}}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r_i \alpha$

con  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  aceleración angular  $[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$

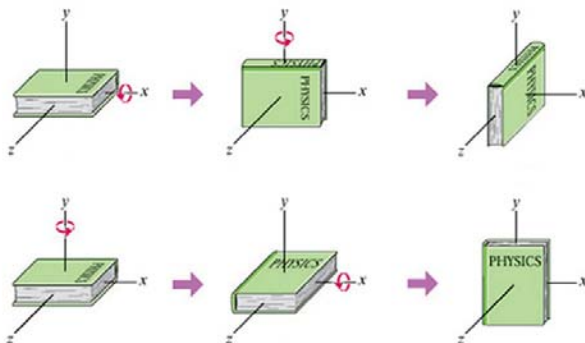
aceleración radial  $= a_{r_i} = \frac{v_{t_i}^2}{r_i} = r_i \omega^2$



302

¿  $\theta, \omega, \alpha$  SON VECTORES ?

LAS ROTACIONES FINITAS NO SON ASOCIATIVAS

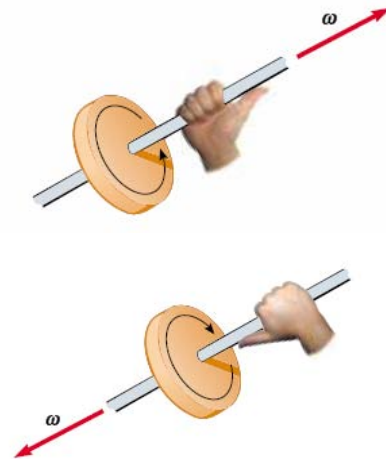
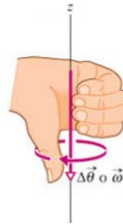
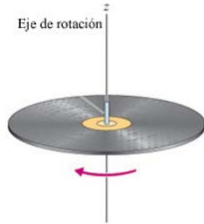


303

sin embargo, a medida que los ángulos de rotación se hacen más pequeños, las rotaciones se vuelven asociativas

$\Rightarrow$  las rotaciones pueden ser representadas por un vector

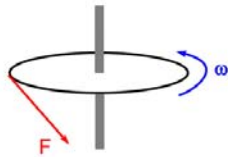
CONVENCIÓN:



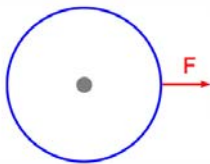
304

TORQUE

ES]



AL APLICAR LA FUERZA  $F$   
EL DISCO GIRARÁ

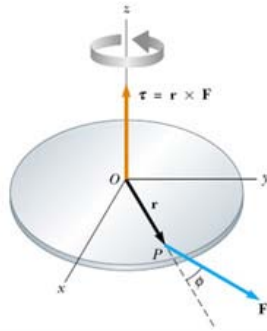


$\Rightarrow$  EL DISCO NO GIRARÁ

LA FUERZA Y LA POSICIÓN DEL PUNTO DONDE ÉSTA SE APLICA  
AFECTAN LA ROTACIÓN DE UN CUERPO

305

SE DEFINE EL TORQUE O MOMENTO DE LA FUERZA  $\vec{\tau}$  POR

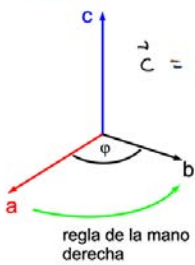


DONDE  $\vec{r}$  ES EL VECTOR POSICIÓN DEL PUNTO DE APLICACIÓN DE LA FUERZA RESPECTO AL ORIGEN DE COORDENADAS O

$\vec{\tau}$  DEPENDE DEL ORIGEN DEL SISTEMA DE COORDENADAS

306

# PRODUCTO VECTORIAL



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{c}$  ES  $\perp$  A  $\vec{a}$  Y  $\vec{b}$

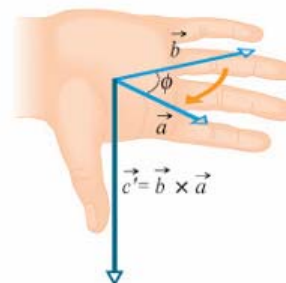
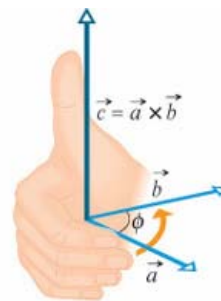
## PROPIEDADES

$$i) |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$$

$$ii) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

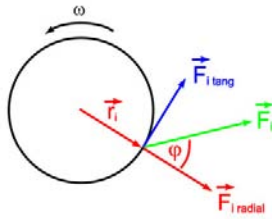
¡EL ORDEN ES IMPORTANTE!

$$iii) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$



307

→  $\tau$  AFECTA LA VELOCIDAD ANGULAR DE UN CUERPO



$$F_{i,radial} = F_i \cos \phi$$

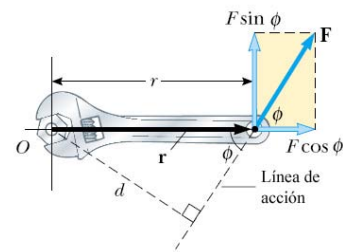
$$F_{i,tang} = F_i \sin \phi$$

LA COMPONENTE RADIAL DE LA FUERZA  $F_i$  NO AFECTA LA ROTACIÓN DEL CUERPO

POR OTRO LADO

$$F_{i,tang} = m_i a_{t,i} = m_i r_i \alpha \quad / \cdot r_i$$

$$r_i F_{i,tang} = m_i r_i^2 \alpha$$



308

PERO  $r_i F_{i,tang} = \tau_i$  ENTONCES

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\therefore \tau_{total} = \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha$$

$$\tau_{total} = I \alpha$$



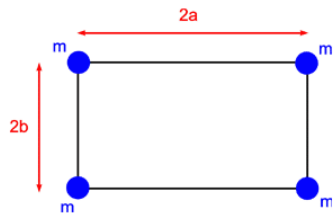
DONDE  $I \equiv \sum_i m_i r_i^2$  ES EL MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO

$I$  MIDE LA RESISTENCIA DE UN CUERPO A CAMBIAR SU VELOCIDAD DE ROTACIÓN

309

$I$  DEPENDE DE LA DISTRIBUCIÓN  
 DE MASA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN

EJ



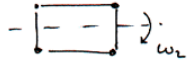
i)



$$I_1 = m_1 a^2 + m_2 a^2 + m_3 a^2 + m_4 a^2$$

$$I_1 = 4ma^2$$

ii)



$$I_2 = 4mb^2 \neq I_1$$

310

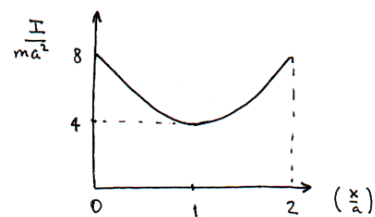
iii)



$$I = 2mx^2 + 2m(2a-x)^2$$

$$I = 4mx^2 - 8max + 8ma^2$$

$$\frac{I}{ma^2} = 4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{a}\right) + 8$$

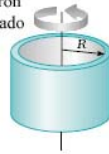


311

### Momento de inercia de algunos sólidos homogéneos

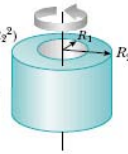
Anillo o cascarón  
cilíndrico delgado

$$I_{CM} = MR^2$$



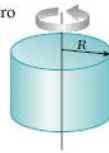
$$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

Cilindro con  
agujero en el  
centro



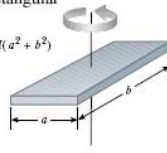
Disco o cilindro  
sólido

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



Placa rectangular  
delgada

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



Barra delgada con  
eje de rotación en  
el centro de masa

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$



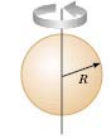
Barra delgada con  
eje de rotación en  
uno de sus extremos

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



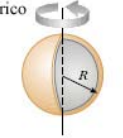
Esfera sólida

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$



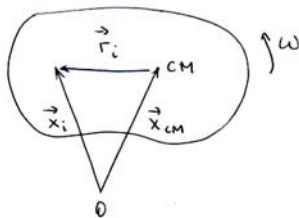
Cascarón esférico  
delgado

$$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$$



312

### TEOREMA DE STEINER (EJES PARALELOS)

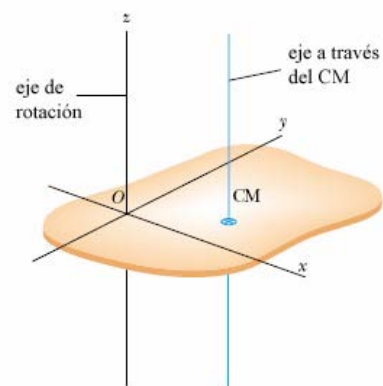


El cuerpo rota en torno  
a un eje en el punto O  
(que puede estar fuera  
del cuerpo)

$\vec{r}_i$  posición de la partícula i-ésima c/r al centro de  
masa

$\vec{x}_i$  posición de la partícula i-ésima c/r al eje  
de rotación

$\vec{x}_{CM}$  posición del centro de masa c/r al eje de  
rotación



313



$$\vec{x}_i = \vec{x}_{cm} + \vec{r}_i \text{ con } \vec{x}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{x}_i$$

Entonces, el momento de inercia wr a 0 es

$$I_0 = \sum m_i \vec{x}_i^2 = \sum m_i (\vec{x}_{cm} + \vec{r}_i)^2$$

$$I_0 = \sum m_i (\vec{x}_{cm}^2 + 2\vec{x}_{cm} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2)$$

$$I_0 = \sum m_i \vec{x}_{cm}^2 + 2\vec{x}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{r}_i + \sum m_i \vec{r}_i^2$$

pero  $\sum m_i \vec{r}_i = 0$  y  $\sum m_i = M$

$$\Rightarrow I_0 = M \vec{x}_{cm}^2 + \sum m_i \vec{r}_i^2$$

314

pero  $M \vec{x}_{cm}^2 = I_{cm}$  = momento de inercia del CM  
 wr al eje 0

$\sum m_i \vec{r}_i^2 = I_{cr,cm}$  es el momento de inercia  
 del cuerpo wr a un eje  
 ubicado en el centro de  
 masa.

$$\therefore I_0 = M R_{cm}^2 + I_{cr,cm}$$



315