

## Capítulo 9

# Rotación de un cuerpo rígido

En este capítulo estudiaremos rotaciones de un cuerpo sólido. No consideraremos el caso general, que será materia de cursos más avanzados, sino que analizaremos sólo el caso en que el movimiento rotacional del sólido es en torno a un eje fijo (o que al menos no cambie su orientación a medida que transcurre el tiempo).

### 9.1. Las ecuaciones básicas

Consideremos un cuerpo sólido, que gira con velocidad angular  $\omega_0$  en torno a un eje fijo que elegiremos como el eje  $\hat{z}$ . El origen lo elegimos en algún lugar sobre el eje. Es usual definir un vector velocidad angular por

$$\vec{\omega}_0 = \pm\omega_0 \hat{z} ,$$

donde  $\omega_0 = |\vec{\omega}_0|$  y el signo se elige usando la regla de la mano derecha: si los dedos curvados indican la dirección de rotación, entonces el pulgar muestra la dirección en que apunta  $\vec{\omega}_0$ .

Para ser concretos, supongamos que el sólido consta de  $N$  masas  $m_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), ubicadas en los puntos  $\vec{r}_j$ , unidas por varillas rígidas sin masa (ver figura 9.1).

El vector posición de cada partícula se puede descomponer como sigue:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_{\perp j} + z_j \hat{z} .$$

La magnitud  $r_{\perp j} = |\vec{r}_{\perp j}|$  es la distancia de la masa  $m_j$  al eje de giro.

La velocidad de cada masa viene dada por

$$\vec{v}_j = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_j .$$

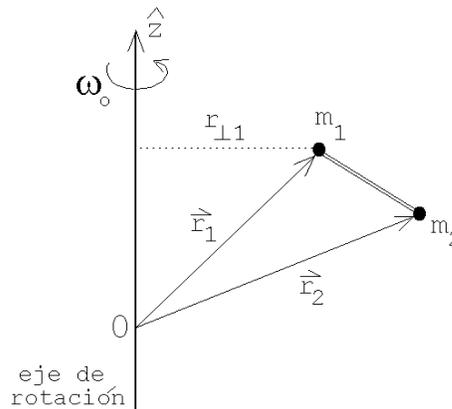


Figura 9.1

Para la rapidez de la masa  $j$  se obtiene

$$v_j = r_{\perp j} \omega_0 .$$

Evaluemos la energía cinética del sólido y también la componente del momento angular que apunta a lo largo del eje de rotación.

La energía cinética (debido a la rotación del sólido) viene dada por la suma de las energías cinéticas de cada una de las masas, o sea:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j v_{\perp j}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 \right) \omega_0^2 \end{aligned}$$

Observe que las coordenadas  $z_j$  de las distintas masas no intervienen en la expresión para la energía cinética. Algo similar ocurre al evaluar la componente  $z$  del momento angular (hagámoslo aquí para una partícula):

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= m\vec{r} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) \\ &= m\vec{\omega}_0 r^2 - m\vec{r}(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}) \\ &= m\omega_0 r^2 \hat{z} - m\vec{r}\omega_0 z \\ &= m\omega_0 r^2 \hat{z} - m(z\hat{z} + \vec{r}_{\perp})\omega_0 z \\ &= m\omega_0 (r^2 - z^2) \hat{z} - m\omega_0 z \vec{r}_{\perp} \\ &= m\omega_0 r_{\perp}^2 \hat{z} - m\omega_0 z \vec{r}_{\perp} . \end{aligned}$$

Para la componente  $z$  del momento angular se tiene entonces

$$\ell_z = m r_{\perp}^2 \omega_0 .$$

La componente  $z$  del momento angular de todas las partículas que componen el sólido es, por lo tanto,

$$L_z = \left( \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 \right) \omega_0 .$$

En dos ocasiones ya nos ha aparecido la expresión  $\sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2$ . Es útil definir explícitamente este concepto: Definiremos el *momento de inercia* del sólido en torno a un eje por

$$I \equiv \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 .$$

De esta manera la energía cinética y la componente del momento angular paralela al eje de rotación vienen dadas por

$$K = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

y

$$L_z = I \omega_0 .$$

Si sobre un sistema aplicamos un torque en la dirección  $z$ , entonces cambiará la componente  $z$  de su momento angular de acuerdo a la relación

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega_0}{dt} = I \dot{\omega}_0 ,$$

o sea, conociendo el torque podemos evaluar su aceleración angular.



En el capítulo anterior demostramos que el momento angular de un sólido que se mueve en el espacio, respecto a un origen  $O$  se puede escribir como una suma de dos contribuciones: i) el momento angular debido a la traslación del sistema como un todo, es decir, el movimiento del centro de masas con toda la masa concentrada en ese lugar y, ii) el momento angular (rotacional intrínseco) del sistema,  $\vec{L}'$ , visto desde el centro de masas, es decir,

$$\vec{L} = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} + \vec{L}' .$$

Mostraremos a continuación que se tiene una expresión análoga para la energía cinética. Sea  $\vec{v}_j$  la velocidad de la partícula  $j$  medida desde un sistema de referencia  $O$ ,  $\vec{v}_j'$  la velocidad de la misma partícula pero vista desde el sistema de referencia fijo al centro de masas y  $\vec{V}_{cm}$  la velocidad del centro de masas. Entonces se tiene que

$$\vec{v}_j = \vec{v}_j' + \vec{V}_{cm} .$$

La energía cinética (para el observador  $O$ ) es

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j^2 .$$

A partir de las dos últimas ecuaciones se encuentra que

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\vec{v}_j' + \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_j' + \vec{V}_{cm}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j'^2 + \sum_{j=1}^N m_j \vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}_j' + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{V}_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j'^2 + \vec{V}_{cm} \cdot \left( \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j' \right) + \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 \end{aligned} \tag{9.1}$$

El primer término al lado derecho de la última ecuación es la energía cinética del sólido vista desde el centro de masas, o sea, corresponde a la energía cinética debido a la rotación

intrínseca del sólido. Como vimos al inicio de la presente sección, esta energía cinética la podemos escribir de la forma

$$K' = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j'^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 .$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (9.1) es nulo ya que  $(\sum m_j \vec{v}_j')/M$  es la velocidad del centro de masas vista desde el centro de masas. Por último, el tercer término del lado derecho de la ecuación (9.1) es la energía cinética de traslación del sólido como un todo. Concluimos que la ecuación (9.1) se puede escribir de la forma

$$K = \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 .$$

## 9.2. Momento de inercia

De vital importancia para describir las rotaciones de un sólido es el concepto de momento de inercia. Para un sólido constituido de  $N$  masas discretas (unidas rígidamente con varillas sin peso), el momento de inercia viene dado por

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_{\perp j}^2 .$$

Para distribuciones de masa continua, la expresión anterior debe sustituirse por una con integrales que adecuadamente describa la situación. Por ejemplo: si un cuerpo sólido viene descrito por una densidad de masa  $\rho(x, y, z) = \rho(\vec{r})$ , entonces el momento de inercia en torno al eje  $\hat{z}$  viene dado por

$$I = \int_{\text{Sólido}} (x^2 + y^2) \rho(\vec{r}) dx dy dz .$$

En la última expresión  $(x^2 + y^2)$  es el cuadrado de la distancia al eje de la masa del volumen  $d^3r = dx dy dz$  ubicado en el lugar  $\vec{r}$ .

Evaluemos algunos momentos de inercia importantes:

### Ejemplo 1:

Evaluemos el momento de inercia de una varilla de largo  $L$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por uno de sus extremos (ver figura 9.2).

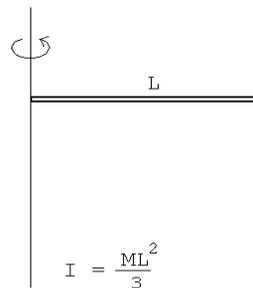


Figura 9.2

La densidad lineal de la varilla es  $\lambda = M/L$ . El trozo de varilla de largo  $dx$  que se encuentra a una distancia  $x$  del eje tiene una masa igual a  $\lambda dx$  y su contribución al momento de inercia es  $x^2 \lambda dx$ . Sumando todas las contribuciones desde  $x = 0$  hasta  $x = L$  se obtiene

$$I = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L \right) = \frac{\lambda L^3}{3},$$

o sea

$$I = \frac{ML^2}{3}.$$

**Ejemplo 2:**

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio  $R$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.3).

Como toda la masa del anillo está a la distancia  $R$  del eje, el momento de inercia es simplemente

$$I = MR^2.$$

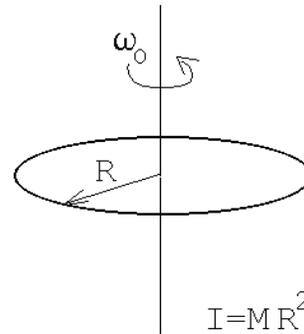


Figura 9.3

**Ejemplo 3:**

Evaluemos el momento de inercia de un disco uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  en torno a un eje que pasa perpendicularmente por el centro (ver figura 9.4). La densidad superficial del disco viene dada por  $\sigma = M/(\pi R^2)$ . Para encontrar el momento de inercia subdividiremos el disco en anillos infinitesimales.

El momento de inercia  $dI$  de un anillo de radio  $r$  y ancho  $dr$  viene dado por (ver ejemplo anterior)

$$dI = (\text{masa del anillo}) \cdot r^2.$$

Pero la masa de tal anillo es

$$(\text{masa del anillo}) = \sigma 2\pi r dr,$$

luego

$$dI = 2\pi\sigma r^3 dr.$$

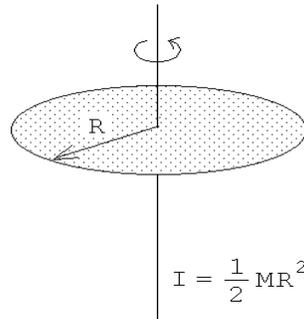


Figura 9.4

Sumando la contribución de todos los anillos desde  $r = 0$  hasta  $r = R$  se encuentra

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi\sigma}{2} R^4 .$$

Sustituyendo la expresión para  $\sigma$  se obtiene finalmente

$$I = \frac{MR^2}{2} .$$

#### Ejemplo 4:

Encontremos el momento de inercia de una esfera uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  alrededor de un eje que pasa por el centro.

La densidad de masa de la esfera viene dada por

$$\rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} .$$

Para encontrar el momento de inercia de una esfera supongamos que ella está constituida por numerosos discos infinitesimales de grosor  $dz$  (ver figura 9.5). El radio del disco infinitesimal que se encuentra a una altura  $z$  viene dado por  $\sqrt{R^2 - z^2}$ . El área de tal disco es por lo tanto

$$A = \pi(R^2 - z^2) .$$

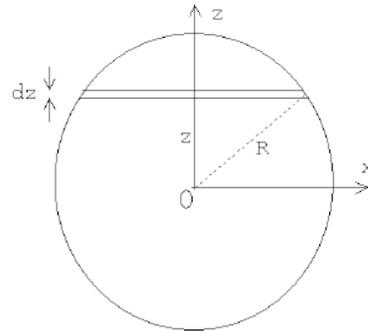


Figura 9.5

Para la masa  $dM$  (que es el volumen del disco infinitesimal multiplicado por su densidad) se obtiene

$$dM = \rho_0 \pi(R^2 - z^2) dz .$$

La contribución de tal disco al momento de inercia de la esfera es (ver ejemplo 3)

$$dI = \frac{1}{2} dM (R^2 - z^2) = \frac{\rho_0 \pi}{2} (R^2 - z^2)^2 dz .$$

Sumando la contribución de todos los discos desde  $z = -R$  hasta  $z = R$  se encuentra

$$\begin{aligned}
 I = \int dI &= \int_{-R}^R dI = \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \left( R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-R}^R \\
 &= \frac{\rho_0 \pi}{2} 2 \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) \\
 &= \rho_0 \pi R^5 \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para  $\rho_0$  se obtiene finalmente

$$I = \frac{2}{5} M R^2 .$$

### Ejemplo 5:

Evaluemos el momento de inercia de una esfera hueca de radio interno  $R_i$  y radio externo  $R_e$ , hecha de un material de densidad uniforme  $\rho_0$ , para un eje que pasa por el centro.

Es fácil resolver este problema si se observa que la esfera hueca se puede pensar como dos esferas concéntricas sobrepuestas: una de radio  $R_e$  con densidad  $\rho_0$  y otra de radio  $R_i$  con densidad negativa  $-\rho_0$ .

El momento de inercia de esta superposición (que coincide con la de la esfera hueca) viene dado por (ver ejemplo 4)

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho_0 R_e^5 + \frac{8}{15} \pi (-\rho_0) R_i^5 = \frac{8}{15} \pi \rho_0 (R_e^5 - R_i^5) .$$

Expresemos el resultado también en términos de la masa de la esfera hueca, que es:

$$M = \frac{4}{3} \pi (R_e^3 - R_i^3) \rho_0 .$$

Sustituyendo esta relación en la expresión para el momento de inercia se encuentra

$$I = \frac{2}{5} M \frac{(R_e^5 - R_i^5)}{(R_e^3 - R_i^3)} .$$

Para  $R_i \rightarrow 0$ , se recupera, tal como debe ser, el resultado del ejemplo anterior.

### Ejemplo 6:

Evaluemos el momento de inercia de una cáscara esférica de radio  $R$  y masa  $M$ , para un eje que pasa por el centro.

Para resolver este problema usamos el resultado del ejemplo anterior, evaluándolo en el límite  $R_i \rightarrow R_e$ . Para encontrar este límite pongamos  $R_i = R_e - \epsilon$  con  $\epsilon$  muy pequeño. Se tiene:

$$\begin{aligned} R_e^3 - R_i^3 &= R_e^3 - (R_e - \epsilon)^3 \\ &= R_e^3 - R_e^3 \left(1 - \frac{\epsilon}{R_e}\right)^3 \\ &\simeq R_e^3 - R_e^3 \left(1 - 3\frac{\epsilon}{R_e}\right) \\ &\simeq 3R_e^2\epsilon. \end{aligned}$$

De la misma manera se encuentra que

$$R_e^5 - R_i^5 = 5R_e^4\epsilon.$$

Reemplazando estos resultados en la expresión para el momento de inercia, e igualando  $R_e$  con  $R$ , se encuentra (para el momento de inercia de una cáscara esférica)

$$I = \frac{2}{3}MR^2.$$

### Ejemplo 7:

Evaluemos el momento de inercia de un anillo de radio  $r$  y masa  $M$  en torno a un eje que coincide con un diámetro del anillo (ver figura 9.6).

Para resolver este problema subdividamos el anillo en numerosos sectores angulares infinitesimales. La densidad lineal del anillo es  $\lambda = M/(2\pi R)$ . La masa del anillo del sector comprendido entre  $\phi$  y  $\phi + d\phi$  es  $\lambda r d\phi$ . Su contribución al momento de inercia del anillo es

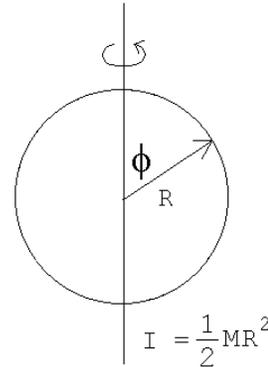


Figura 9.6

$$dI = \lambda R d\phi (R \sin \phi)^2.$$

Sumando la contribución de todos los sectores (desde  $\phi = 0$  hasta  $\phi = 2\pi$ ) se obtiene

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \lambda R^3 \sin^2 \phi d\phi.$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi,$$

luego

$$I = \lambda R^3 \pi = \frac{1}{2}MR^2.$$

### 9.3. Problemas

1. (Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos) Demuestre que el momento de inercia  $I$  para las rotaciones de un cuerpo sólido alrededor de un eje  $L$  es

$$I = I_0 + M R^2 ,$$

donde  $I_0$  es el momento de inercia para rotaciones del sólido alrededor del eje paralelo a  $L$  que pasa por el centro de masas y  $R$  es la distancia de separación de los dos ejes.

2. Encuentre el momento de inercia de las superficies, de densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ , mostrados en la figura 9.7 y en torno a los ejes ahí indicados.

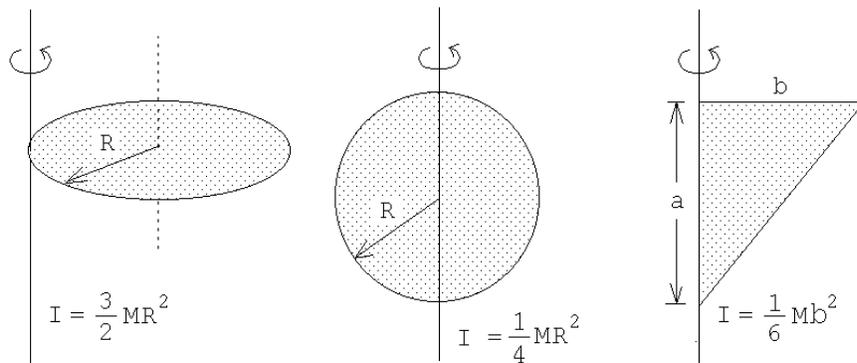


Figura 9.7

3. Considere un sistema de dos masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas por una distancia  $r$ . Demuestre que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masas en forma perpendicular a la línea que los une, viene dado por  $\mu r^2$ , donde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  es la masa reducida del sistema.
4. Encuentre el momento de inercia de los alambres, de densidad lineal uniforme  $\lambda_0$ , mostrados en la figura 9.8 y en torno a los ejes ahí indicados.

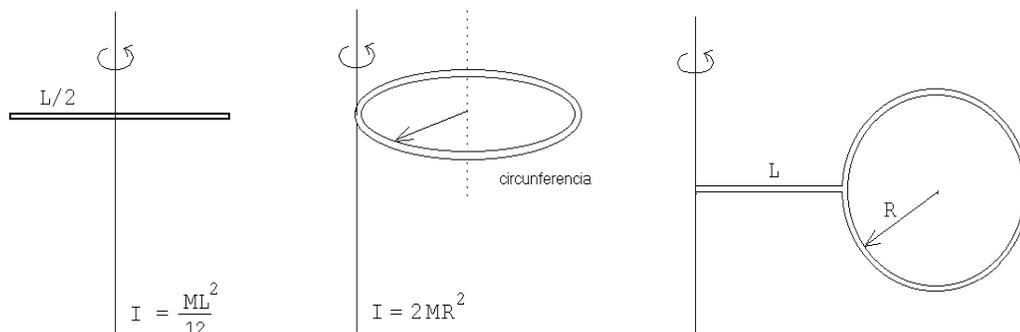


Figura 9.8

5. La molécula de metano consiste de un átomo de carbono localizado al centro de un tetraedro regular cuyos vértices están ocupados por 4 átomos de hidrógeno. La distancia C—H es de  $1.08 \text{ \AA}$ . ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ). ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula de metano para una rotación alrededor de un eje C—H? Las masas de los átomos de hidrógeno y carbono son:  $m_H = 1.68 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$  y  $m_C = 19.9 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ , respectivamente.

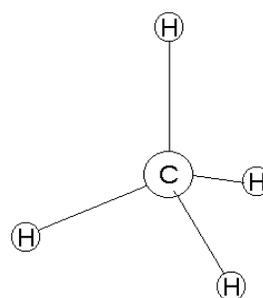


Figura 9.9

6. Una esfera sube rodando un plano inclinado en  $30^\circ$ . Cuando la esfera se encuentra al pie del plano, su centro de masas se traslada con una velocidad de  $5 \text{ m/s}$ . ¿Hasta dónde subirá la esfera por el plano inclinado? ¿Cuánto tiempo tardará en regresar al punto de partida?
7. Se enrolla una cuerda alrededor de la plataforma de un carrusel de radio  $R = 2 \text{ m}$  para echarlo andar. Durante  $10 \text{ s}$  se tira de la cuerda con una fuerza de  $200 \text{ N}$ . Durante ese tiempo el carrusel da una vuelta completa. ¿Cuál es el momento de inercia del carrusel?

Respuesta:  $I = 3183 \text{ kg m}^2$ .

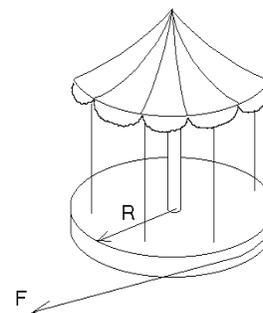


Figura 9.10

8. Los dos discos mostrados en la figura adjunta tienen masas  $m$  y radios  $R$  iguales. El disco superior puede rotar libremente alrededor de su eje. Una cuerda está enrollada alrededor de ambos discos. Encuentre:
- La aceleración del centro de masas del disco inferior.
  - La tensión de la cuerda.
  - La aceleración angular de cada disco alrededor de su centro de masas.

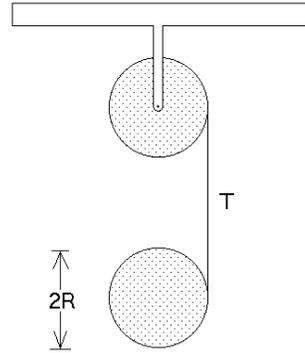


Figura 9.11

9. Una esfera de densidad uniforme  $\rho_0$  y radio  $r$  rueda sin deslizarse a lo largo de una vía que posee una vuelta circular de radio  $R$  (ver figura 9.12). La esfera inicia su movimiento partiendo, del reposo, desde una altura  $h$ . ¿Cuál es la mínima altura  $h$  requerida para que la esfera no deje la vía? ¿Cuál sería la altura  $h$  si la bola en lugar de rodar se desliza resbalando?

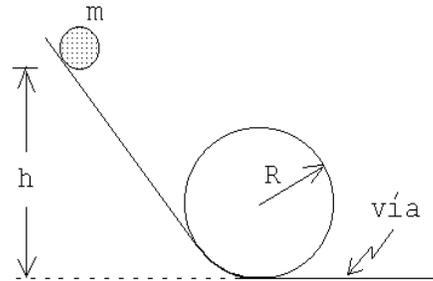


Figura 9.12

Respuesta:  $h = 27(R - r)/10$ .

10. Una bola de palitroque, de radio  $R$  y masa  $M$ , se lanza de manera que inicialmente resbale (sin que ruede) con velocidad  $v_0$ . Si el coeficiente de roce entre el suelo y la bola es  $\mu$ , ¿qué distancia recorrerá la bola antes de que ruede sin resbalar? ¿Cuál es su velocidad final?

Respuesta:  $v_f = 5v_0/7$ .

11. Considere dos poleas (discos) de masas  $m_1, m_2$  y radios  $R_1, R_2$ , respectivamente. Con estas poleas se realiza el montaje mostrado en la figura adjunta (la cuerda está enrollada en torno a la polea # 2). Encuentre la aceleración de la masa  $M$ .

Respuesta:

$$a = -g \frac{M + m_1}{M + \frac{3}{2}m_1 + 2m_2}.$$

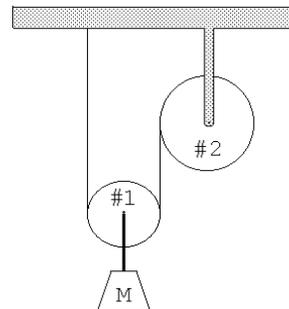


Figura 9.13

12. Una varilla de largo  $L$  y masa  $M$  puede rotar libremente alrededor de un pivote  $A$ . Una bala de masa  $m$  y velocidad  $v$  impacta contra la varilla en un punto  $P$  alejado una distancia  $a$  desde el pivote, quedando incrustada en ella.

- Encuentre el momento angular alrededor del punto  $A$  inmediatamente antes y después de la colisión.
- Determine el momento lineal del sistema inmediatamente antes y después de la colisión.
- ¿Cuál es el valor  $Q$  de la colisión, es decir, cuánta energía es disipada durante el proceso?

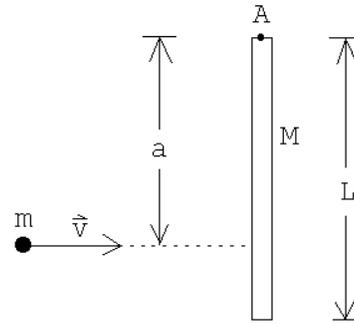


Figura 9.14

- Dos niños, cada uno de masa  $M$ , están sentados en los extremos de una barra horizontal de largo  $L$  y masa  $m$ . La barra gira inicialmente con una velocidad angular  $\omega_0$  alrededor de un eje vertical que pasa por su centro.

- ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve una distancia  $d$  hacia el centro de la barra (sin tocar el suelo)?
- ¿En cuánto cambiará la energía cinética de rotación del sistema?

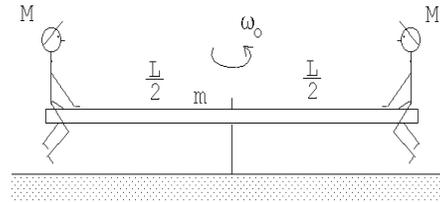


Figura 9.15

- Una esfera, un disco y un aro, hechos de materiales homogéneos, tienen el mismo radio  $R$  y la misma masa  $M$ . Los tres objetos se dejan libres desde la parte superior de un plano inclinado. Los tres objetos parten desde el reposo y ruedan sin resbalar. El plano tiene un largo  $L$  y su inclinación respecto a la horizontal es  $\alpha$ .

- ¿Cuáles son sus velocidades al llegar al pie del plano inclinado?
- Encuentre la fuerza de roce  $f_r$  en cada caso.
- ¿Cuánto tarda cada uno de los objetos en llegar a la parte inferior?

- Un aro circular de radio  $R$  oscila en torno a un eje horizontal que pasa por  $A$  (ver figura). El eje es normal al plano del aro.

- ¿Cuál sería el largo de un péndulo simple con igual período de oscilación que el del aro? (Haga el análisis sólo para pequeñas oscilaciones.)
- Se desea que el aro de una vuelta completa alrededor de  $A$ . ¿Cuál es la mínima velocidad angular que debe poseer el aro, en la parte inferior, para que esto sea posible?

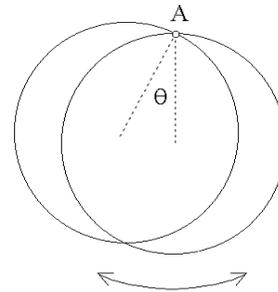


Figura 9.16

16. Un aro circular de masa  $m$  y radio  $R$  descansa sobre una superficie horizontal sin roce (ver figura, vista desde arriba). Contra el aro se dispara tangencialmente una bala con velocidad  $\vec{v}_0$ , cuya masa también es  $m$ . La bala queda incrustada en el aro.

- Describa el movimiento del sistema después del choque.
- ¿Cuál es la velocidad del centro de masas del sistema antes y después del choque?
- ¿Cuál es el momento angular del sistema respecto a su centro de masas antes del choque?
- ¿Cuál es la velocidad angular con que gira el sistema después del choque?
- ¿Cuánta energía cinética se pierde en el choque?

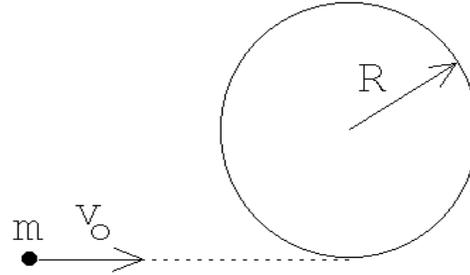


Figura 9.17

17. Un aro de masa  $M$  y radio  $r$ , rueda sin resbalar por la superficie interior de una cinta circular fija de radio  $R$  (ver figura 9.18). Encuentre el período de este movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical.

Respuesta:

$$T = (2\pi)/\omega_0 \quad , \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{2(R-r)} \quad .$$

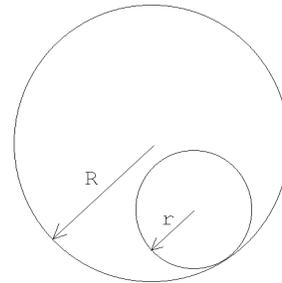


Figura 9.18

18. Considere la máquina de Atwood mostrada en la figura adjunta. La polea consta de un disco uniforme de masa  $m$  (que coincide con el valor de la masa más pequeña colgada de la máquina) y radio  $R$ . El momento de inercia para rotaciones en torno al eje de un disco es  $I = mR^2/2$ . El roce entre la cuerda y la polea hace que esta última gire mientras las masas estén en movimiento. Suponga que la cuerda no tiene masas y que no desliza sobre la polea. La masa  $2m$  parte del reposo desde una altura  $h$ .

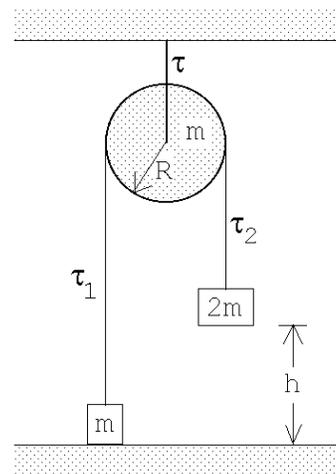


Figura 9.19

- a) Usando el teorema de conservación de la energía, encuentre la velocidad de la masa  $2m$  cuando ésta llega al suelo.
- b) Encuentre la tensión de la cuerda a ambos lados de la máquina de Atwood. Es decir, encuentre  $\tau_1$  y  $\tau_2$  en función de  $m$ ,  $g$  y  $R$ . (Cuando el momento de inercia de la polea no se puede despreciar (lo que es el caso del presente problema) entonces la tensión de la cuerda no es la misma a ambos lados de la polea.)
- c) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea mientras las masas están en movimiento.
- d) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea después de que la masa  $2m$  llegará al suelo (y todas las componentes de la máquina de Atwood están en reposo).
19. Considere dos poleas fijas unidas por una correa (o cadena) de transmisión tal como se muestra en la figura adjunta. Una masa  $M$  colgada por una cuerda enrollada en la polea #1 pone en movimiento el sistema. Suponga que las poleas son discos de radio  $R$  y tienen una masa también igual a  $M$  (es decir, el momento de inercia de las dos poleas coinciden, teniéndose  $I = MR^2/2$ ). Note que una correa (o cadena) de transmisión sólo puede transmitir una fuerza de tracción. Para el presente problema sólo la parte superior de la correa transmite una fuerza entre las poleas.

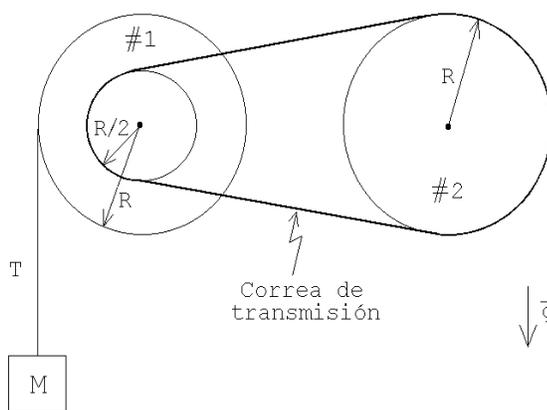


Figura 9.20

- a) Encuentre la tensión  $T$  de la cuerda.
- b) Encuentre la aceleración angular de la polea #1.
- c) Usando la *ley de conservación de la energía*, encuentre la velocidad  $v$  que tiene la masa  $M$  después de haber bajado una distancia  $h$ . (La masa  $M$  parte desde el reposo).

20. Una barra uniforme de largo  $L$  apoyada contra la pared comienza a resbalar (sin roce). Inicialmente el ángulo que forma con la pared es  $\theta_0$ . Encuentre la altura  $z$  para la cual el extremo  $A$  de la barra se separa de la pared vertical.

Respuesta:  $z = \frac{2}{3}L \cos \theta_0$ .

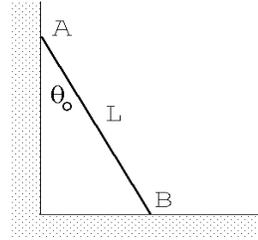


Figura 9.21

21. Una carretilla de hilo, formada de dos discos y un cilindro de las dimensiones indicadas en la figura 9.22a, se tira del hilo que tiene enrollado tal como se muestra en la figura 9.22b. Encuentre la aceleración de la carretilla de hilo si ésta rueda sin resbalar.

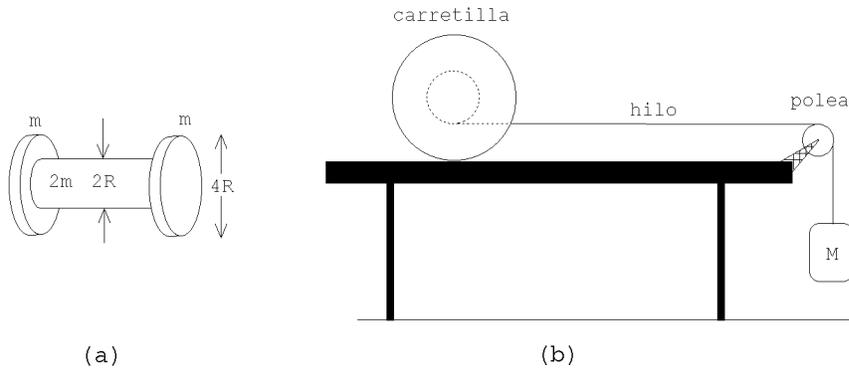


Figura 9.22

22. Considere un automóvil de masa  $M$ , cuya geometría se muestra en la figura adjunta, y que inicialmente se mueve con velocidad  $-v_0 \hat{x}$ . Suponga que en cierto instante el automóvil frena bloqueando las dos ruedas delanteras. Encuentre la distancia que el automóvil alcanza a recorrer durante el frenado si el coeficiente de roce cinemático entre el pavimento y las ruedas es  $\mu_c$ . Asuma que durante el frenado, las ruedas traseras, en todo instante, están en contacto con el pavimento, situación que generalmente se da en la práctica.

Bajo ciertas condiciones extremas de frenado, el automóvil podría elevarse por la parte trasera y tumbarse. Encuentre la condición que debe satisfacerse para que el automóvil quede, en todo instante, con las cuatro ruedas sobre el pavimento.

Haga también un análisis del proceso de aceleración del automóvil.

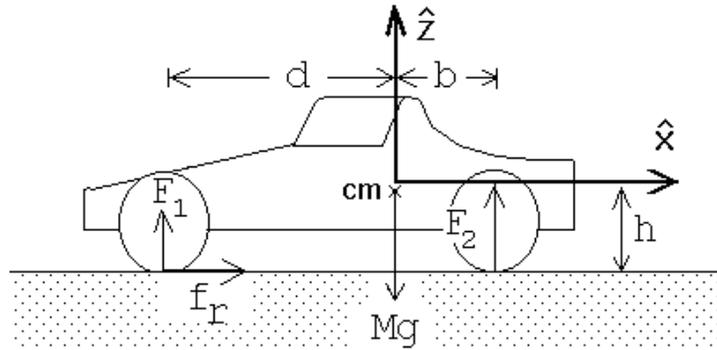


Figura 9.23

23. Considere una varilla rígida (de masa despreciable), que en cada uno de sus extremos tiene adosada una masa  $m$ . La varilla se desplaza inicialmente sin rotar sobre el plano  $(x, y)$ , con la velocidad del centro de masas  $\vec{v} = v_0 \hat{x}$  y con la varilla orientada de manera de formar un ángulo  $\alpha$  con el eje  $\hat{x}$ , (ver figura). En cierto lugar una de las masas choca elásticamente con una pared rígida, tal como se muestra en la figura. Después de la colisión (el centro de masas de) la varilla con las masas se trasladará uniformemente, rotando simultáneamente con velocidad angular constante.

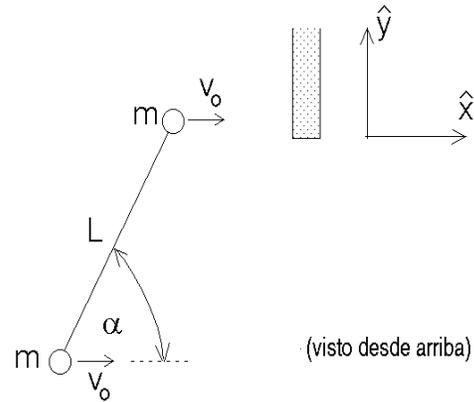


Figura 9.24

Desprecie el roce entre las masas  $m$  y el plano y suponga también que la pared está pulida, es decir, no hay fuerzas de roce entre la masa  $m$  y la pared cuando entran en contacto.

- Determine la velocidad angular de la varilla después de la colisión.
- Encuentre el impulso transmitido al sistema por la pared durante la colisión.
- Verifique que el resultado obtenido en la parte b) da los resultados correctos en los límites  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi/2$ .

24. Uno de los extremos de un resorte ideal de constante elástica  $k$  se fija a una pared. El otro extremo se fija al eje de una rueda cilíndrica de radio  $R$  y masa  $M$ . El resorte se comprime una distancia  $a$ , manteniendo su posición horizontal.

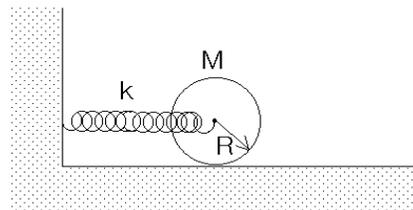


Figura 9.25

Estando el cilindro en contacto con el suelo (superficie rugosa) se suelta éste del reposo. Calcule la velocidad angular del cilindro cuando la elongación del resorte es nula. Suponga que el cilindro no resbala.

25. Cuatro bolitas idénticas, de masa  $m$  cada una, se unen mediante varillas de masa despreciable de largo  $a$  de tal forma que las bolas queden ubicadas en los vértices de un cuadrado.

- a) Calcule el momento de inercia con respecto a un eje a lo largo de la diagonal del cuadrado.
- b) Calcule el momento de inercia con respecto a un eje paralelo a uno de los lados y que pasa por el centro de éste.
- c) Si los dos cuadrados se hacen rotar, cada uno entorno a los ejes descritos anteriormente y con la misma velocidad angular, determine cual de ellos (y en que porcentaje) tiene mayor energía cinética.

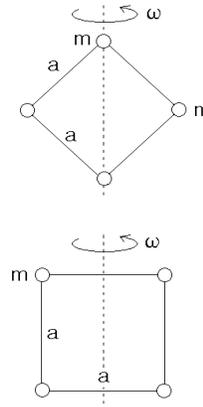


Figura 9.26

26. Un bloque rectangular y un cilindro se unen con una varilla como se muestra en la figura. El cilindro rueda sin resbalar mientras que el bloque desliza sobre el piso rugoso ( $\mu_c$ ). Si la masa del cilindro y del bloque es la misma ( $M/2$ ) y el radio del cilindro es  $R$ , calcule el tramo recorrido por el sistema desde aquel instante en que el sistema se desplaza con rapidez  $v_0$ . Compare con el resultado que obtendría si el cilindro se mantiene fuera de contacto con el piso.

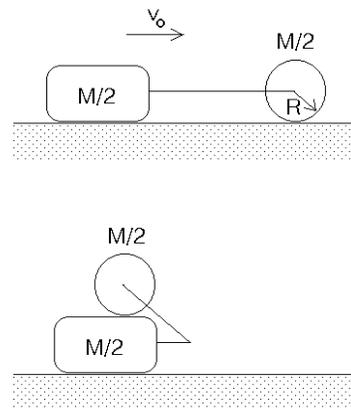


Figura 9.27

27. Considere un cubo de arista  $L$  y masa que se desliza con velocidad  $v_0$  sobre un plano horizontal (sin roce). En cierto lugar el cubo se encuentra con un tope.
- Demuestre que el momento de inercia del cubo respecto a un eje de rotación que coincide con una de sus aristas es  $I = 2ML^2/3$ .
  - ¿Cual es la mínima velocidad que debe tener el cubo para que se vuelque?

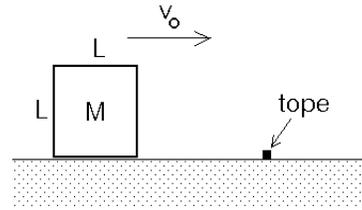


Figura 9.28

28. Una ardilla de masa  $m$  corre (aceleradamente) dentro de un cilindro hueco de radio  $R$  y masa  $M$ . La ardilla en ningún momento resbala y el cilindro posa sobre un plano rugoso horizontal (sobre el cual rueda sin resbalar). A consecuencia de su movimiento acelerado la ardilla se mantiene siempre a una altura  $h$  del suelo. Determinar la aceleración con que se traslada el centro de masas del cilindro (que es la misma con que se traslada la ardilla).

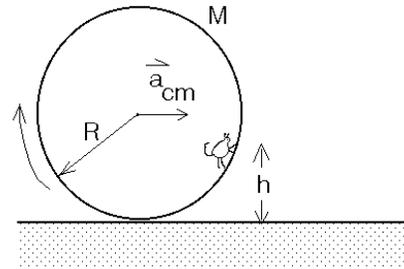


Figura 9.29

29. Un disco de radio  $R$  y masa  $M$ , inicialmente en reposo, puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo. Sobre ese disco se coloca otro disco, de radio  $r$  y masa  $m$  que inicialmente rota con una velocidad angular  $\omega_0$ . Debido al roce entre los dos discos el segundo disco eventualmente quedará en reposo respecto al primero. Si la separación entre los centros entonces es  $D$ , encuentre la velocidad angular final  $\Omega$  con que girarán los dos disco entorno al eje.

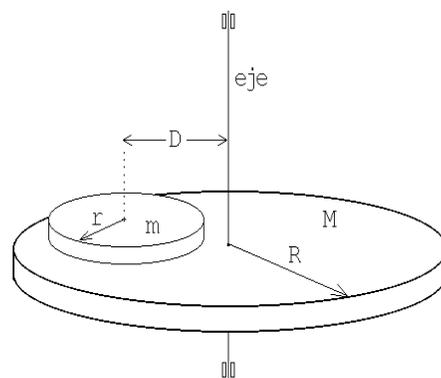


Figura 9.30

30. Una varilla de masa  $M$  y longitud  $L$  cuelga con uno de sus extremos fijo al techo. La varilla puede rotar libremente entorno a este punto. Sobre el piso un cuerpo pequeño de masa  $m$  choca elásticamente con el extremo inferior de la varilla.

- a) Determine la velocidad angular de la varilla inmediatamente después de la colisión.
- b) Determine la masa de la varilla si a consecuencia del choque la masa incidente queda detenida.

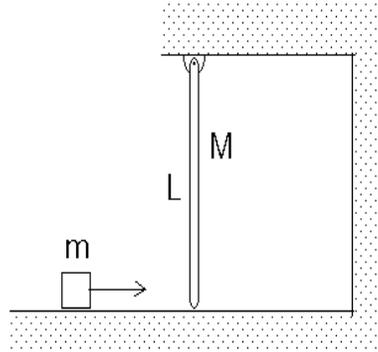


Figura 9.31

31. Una cuerda se enrolla entorno a un cilindro. El cilindro se ubica sobre un plano horizontal rugoso ( $\mu$ ) y en contacto con una pared vertical del mismo material del piso (ver figura). La cuerda se tira con una fuerza  $F$  hacia abajo. Calcular la razón entre las fuerzas normales experimentadas en el suelo y la pared, respectivamente.

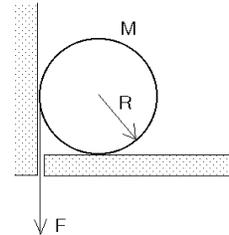


Figura 9.32

32. Considere la configuración experimental mostrada en la figura adjunta. Suponga que no hay roce entre la carretilla de hilo y el plano inclinado. Suponiendo conocidos el momento de inercia  $I$  de la carretilla para rotaciones alrededor de su eje, los radios  $R$  y  $r$ , el ángulo de inclinación  $\alpha$  del plano inclinado, encuentre la aceleración  $a$  del eje de la carretilla.

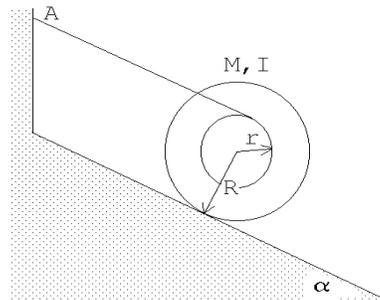


Figura 9.33

33. Un mono se encuentra sobre una plataforma que puede rotar (sin roce) alrededor de un eje. Inicialmente la plataforma y el mono se encuentran en reposo. ¿Qué debe hacer el mono para alcanzar los plátanos que están al otro lado. No hay nada a la mano del mono y supondremos que con sólo soplar no es posible poner en movimiento la plataforma.

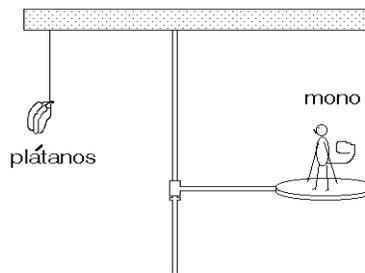


Figura 9.34

34. Considere un péndulo (físico) formado por una varilla de largo  $R$  y masa  $M$  en cuyo extremo está adosada una esfera de radio  $R$  y masa  $2M$ . El péndulo cuelga de uno de los extremos de la varilla.

- Determine el momento de inercia del péndulo para rotaciones entorno al punto de suspensión.
- Determine el período de este péndulo para pequeñas oscilaciones.
- Determine la velocidad angular  $\Omega_0$  que debe darse al péndulo para que éste logre llegar justo a la posición invertida.

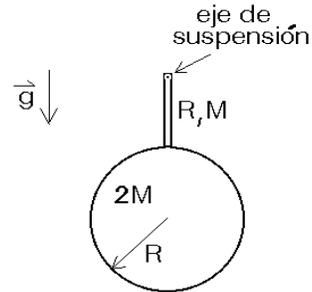


Figura 9.35

35. Una rueda de bicicleta se sostiene del eje con un hilo (amarrado a un solo lado). El punto de amarre se ubica a  $D = 20$  cm del centro de la rueda. El neumático y la llanta pesan  $M = 4$  kg y tienen un radio  $R = 30$  cm. La rueda se hace girar a  $10$  rev/s. El eje se orienta (inicialmente) de manera horizontal.

- Demuestre que el eje de la rueda se mantendrá en posición horizontal y que esta realizará un movimiento circular (coincidiendo el eje de este movimiento con el hilo). Este movimiento se llama *precesión*.
- Encuentre la velocidad angular de precesión.

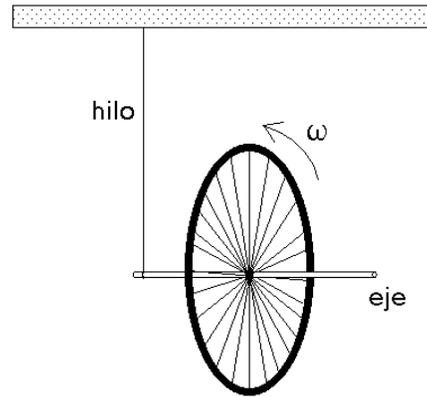


Figura 9.36

36. Un cubo, de lado  $h$  y masa  $m$ , está colocado sobre una cinta transportadora en la orientación que se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de roce estático entre el bloque y la cinta es  $\mu_e = 0,5$  y el coeficiente de roce cinético es  $\mu_c = 0,4$ . En  $t = 0$ , la cinta comienza a moverse, aumentando linealmente su aceleración. En  $t = 20$  s su aceleración es  $\vec{a} = 3 \text{ m/s}^2 \hat{x}$  y en  $t = 60$  alcanza  $9 \text{ m/s}^2 \hat{x}$ . Entre  $t = 0$  y  $t = 60$  s, se observa que el bloque se desplaza en la dirección  $\hat{x}$  manteniendo su orientación original (es decir, sin rotar con respecto a su centro de masa).



Figura 9.37

- a) Calcule la fuerza de roce que actúa sobre el bloque cuando la aceleración de la cinta transportadora es  $3 \text{ m/s}^2$ .
- b) Haga un gráfico de la aceleración en función del tiempo.
- c) Considere un sistema de coordenadas solidario al bloque, con origen en su centro de masa y con el eje  $x$  paralelo a la dirección en que se mueve la cinta. ¿Cuál es la coordenada  $x$  del punto donde actúa la “fuerza normal efectiva” cuando la aceleración de la cinta transportadora es  $6 \text{ m/s}^2 \hat{x}$  ?

## 9.4. Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 8

Definamos el eje  $\hat{z}$  apuntando hacia arriba y concentrémonos primeramente en el disco inferior. Sea  $\vec{a} = -a\hat{z}$  (con  $a > 0$ ) la aceleración lineal del disco inferior. Para tal disco, usando la segunda ley de Newton, se encuentra la ecuación de movimiento

$$\vec{F}_{tot} = -mg\hat{z} + T\hat{z} = m\vec{a} ,$$

o sea,

$$mg - T = ma . \quad (9.2)$$

Sea  $\alpha = \dot{\omega}$  la aceleración angular del disco inferior. El torque ejercido por el peso (respecto al centro de masas del disco) es nulo mientras que el torque ejercido por la cuerda es  $\tau = TR$ . Se tiene

$$\tau = TR = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} = I\alpha .$$

Usando el valor del momento de inercia de un disco  $I = mR^2/2$ , se encuentra

$$T = \frac{1}{2}mR\alpha . \quad (9.3)$$

Siendo los dos discos iguales y siendo que el torque sobre el disco superior (respecto a su centro de masas) es igual al del disco inferior, se concluye que ambos discos se *desenrollarán* con la misma aceleración y velocidad angular.

La aceleración lineal  $a$  y la aceleración angular  $\alpha$  (que es la misma para ambos discos) no son magnitudes independientes, sino que están correlacionadas. En efecto, se tiene que

$$2\alpha R = a . \quad (9.4)$$

A partir de las tres ecuaciones (9.2), (9.3) y (9.4), con las tres incógnitas  $T$ ,  $a$  y  $\alpha$ , se encuentra  $a = 4g/5$ ,  $T = mg/5$  y  $\alpha = 2g/(5R)$ .

**Solución al problema 15**

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de un problema en que la energía se conserva, en muchas ocasiones el método más fácil consiste en escribir una expresión para la energía y derivar ésta respecto al tiempo.

Por ejemplo, para una masa que cae bajo el efecto de la gravedad: la energía total viene dada por

$$E = mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 .$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo se encuentra

$$0 = mg\dot{z} + \frac{1}{2}m2\dot{z}\ddot{z} ,$$

o sea, la ecuación de movimiento para la caída libre  $\ddot{z} = -g$ .

Usemos esta idea para resolver el presente problema. Si  $\theta$  es el ángulo de desviación del anillo respecto a la normal y  $\dot{\theta}$  es su velocidad angular, la energía total del sistema vendrá dada por

$$E = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 . \quad (9.5)$$

Aquí  $m$  es la masa del aro e  $I$  es el momento de inercia respecto al punto de suspensión  $A$ . El primer término al lado derecho representa el cambio de energía potencial del aro (respecto a su posición de equilibrio) mientras que el segundo es la energía cinética rotacional en torno a  $A$ .

Derivando (9.5) respecto al tiempo se obtiene

$$0 = mgR \sin \theta \dot{\theta} + I\dot{\theta}\ddot{\theta} ,$$

o sea,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{I} \sin \theta .$$

Usando el teorema de Steiner y el resultado del ejemplo 2 de la segunda sección, deducimos que el momento de inercia del aro, en torno a  $A$ , es  $I = 2mR^2$ . Usando esta relación, y la aproximación  $\sin \theta \simeq \theta$  para ángulos pequeños, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0 .$$

Esta ecuación de movimiento para el aro corresponde a la de un oscilador armónico y coincide con la de un péndulo de largo  $L = 2R$ . El período de oscilación es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} .$$

Para que el aro dé una vuelta completa la energía cinética en la parte inferior debe coincidir con  $2mgR$ , que es la diferencia de energía potencial que el aro debe sobreponer. Si denotamos por  $\omega_0$  a la velocidad angular en el mínimo, se tiene

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2mgR ,$$

o sea,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}} .$$

### Solución al problema 18

- a) El cambio de energía potencial debe ser igual a la energía cinética final. La masa  $2m$  baja una distancia  $h$  mientras que la masa  $m$  sube una distancia  $h$ . Luego

$$\Delta U = mgh .$$

Sea  $v_0$  la rapidez final de la masa  $2m$ , justo antes de chocar con el suelo. Entonces la energía cinética, en ese instante, es

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 ,$$

donde  $\omega_0 = v_0/R$  es la velocidad angular final de la polea. Usando el valor  $I = mR^2/2$  para el momento de inercia se encuentra que

$$K = 2mv_0^2 .$$

Igualando  $K$  con  $\Delta U$  se encuentra

$$v_0^2 = \frac{gh}{2} .$$

- b) Los diagramas de cuerpo libre de las dos masas nos dan las ecuaciones de movimiento

$$\tau_1 - mg = ma$$

y

$$(2m)g - \tau_2 = (2m)a ,$$

donde  $a$  es la aceleración (hacia arriba) de la masa  $m$ . Sea  $\ddot{\theta}_0$  la aceleración angular de la polea. El hecho de que la cuerda no resbale sobre la polea nos da la relación

$$\ddot{\theta}_0 R = a .$$

Finalmente, evaluando el torque total que actúa sobre la polea se encuentra la ecuación de movimiento para la rotación

$$\tau_2 R - \tau_1 R = I\ddot{\theta}_0 .$$

Tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $a$  y  $\ddot{\theta}_0$ . Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{2}{7}g ,$$

$$\tau_1 = \frac{9}{7}mg$$

y

$$\tau_2 = \frac{10}{7}mg .$$

- c) Mientras las masas están cayendo, como la polea no se desplaza, la fuerza total sobre ella debe ser nula. Por lo tanto, la tensión de la cuerda que sujeta la polea debe ser

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{19}{7}mg .$$

- d) Consideremos la situación que se tiene cuando la masa  $2m$  ha tocado el suelo y todo está detenido. El torque total sobre la polea es nulo y, por lo tanto, la tensión de la cuerda que pasa por la polea debe ser la misma a ambos lados, siendo su valor  $mg$ . Concluimos que la tensión de la cuerda que sujeta la polea, en este caso, es

$$\tau = 2mg .$$

### Solución al problema 19

Sólo la parte superior de la correa de transmisión transmite fuerza. Denotemos ésta por  $F$ . La ecuación de movimiento para la rotación de la polea #2 es

$$FR = I\ddot{\theta}_2 .$$

Para la polea #1 ésta es

$$TR - F\frac{R}{2} = I\ddot{\theta}_1 .$$

El diagrama de cuerpo libre para la masa  $M$  nos da la ecuación

$$Mg - T = Ma ,$$

donde  $a$  es la aceleración (hacia abajo) de la masa  $M$ . Los ángulos de rotación de ambas poleas no son independientes sino que están relacionados por

$$\theta_1 \frac{R}{2} = \theta_2 R .$$

Derivando dos veces respecto al tiempo y cancelando el radio  $R$  se obtiene

$$\ddot{\theta}_1 = 2\ddot{\theta}_2 .$$

Finalmente, también la aceleración  $a$  está relacionada con  $\ddot{\theta}_1$ . En efecto,  $a = R\ddot{\theta}_1$ . De las ecuaciones anteriores podemos despejar las cinco incógnitas  $a$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$ . De esta manera se encuentra

$$a = R\ddot{\theta}_1 = \frac{8}{13}g,$$

$$T = \frac{5}{13}Mg$$

y

$$F = \frac{2}{13}Mg.$$

Después de bajar una distancia  $h$  la energía potencial disminuye en  $\Delta U = Mgh$ . Esta energía debe transformarse en energía cinética.

Si la velocidad de la masa  $M$  es  $v$ , entonces las velocidades angulares de las poleas #1 son  $\omega_1 = v/R$  y  $\omega_2 = v/(2R)$ , respectivamente. La energía cinética es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{13}{16}Mv^2. \end{aligned}$$

Igualando esto con la diferencia de energía potencial se encuentra para  $v$  la expresión

$$v = \sqrt{\frac{16}{13}gh}.$$

### Solución al problema 21

El momento de inercia de la carretilla, para rotaciones alrededor de su eje de simetría, es

$$I = 2\left(\frac{1}{2}m(2R)^2\right) + \frac{1}{2}(2m)R^2 = 5mR^2. \quad (9.6)$$

El diagrama de cuerpo libre para la masa  $M$  nos da la ecuación

$$Mg - T = Ma_M, \quad (9.7)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda y  $a_M$  la aceleración (hacia abajo) de la masa  $M$ . Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento traslacional horizontal de la carretilla se encuentra la ecuación

$$T - f_r = (4m)a_C, \quad (9.8)$$

donde  $f_r$  es el roce estático entre la carretilla y la mesa y  $a_C$  la aceleración de la carretilla. (Este roce es el responsable de hacer que la carretilla ruede sin resbalar). Sea  $\alpha$  la aceleración angular de la carretilla. El torque neto sobre la carretilla debe ser igual al momento de inercia multiplicado por  $\alpha$ , o sea,

$$f_r(2R) - TR = I\alpha. \quad (9.9)$$

Por supuesto que hay una estrecha relación entre  $\alpha$  y  $a_C$ , que viene dada por el hecho que la carretilla rueda sin resbalar. Esta relación es

$$2R\alpha = a_C . \quad (9.10)$$

También existe una relación que vincula  $A_M$ ,  $a_C$  y  $\alpha$ : La cuerda es inextensible y por lo tanto la diferencia entre la aceleración de la carretilla y la masa  $M$  debe coincidir con la aceleración con que la cuerda se enrolla, es decir,

$$a_C - a_M = \alpha R . \quad (9.11)$$

Las ecuaciones (9.6), (9.7), (9.8), (9.9), (9.10) y (9.11) resuelven el problema. Para la aceleración de la carretilla se obtiene

$$a_c = g \frac{2M}{M + 21m} .$$

### Solución al problema 22

Introduzcamos el sistema de coordenadas mostrado en la figura 9.23. (El eje  $\hat{y}$  apunta hacia el interior del papel). Las distintas fuerzas que actúan sobre el automóvil durante el frenado son: Las fuerzas  $\vec{F}_1 = F_1 \hat{z}$  y  $\vec{F}_2 = F_2 \hat{z}$  que el pavimento ejerce sobre las ruedas delanteras y traseras, respectivamente; el peso  $\vec{F}_p = -Mg \hat{z}$  y la fuerza de roce  $\vec{f}_r = +\mu_c F_1 \hat{x}$ .

Como el automóvil no se “eleva”, la fuerza total en la dirección  $\hat{z}$  debe ser nula, es decir,

$$0 = (F_1 + F_2 - Mg) \hat{z} . \quad (9.12)$$

Por otra parte, como el automóvil durante el frenado tampoco “gira” (en torno al eje  $\hat{y}$ ), el torque total (respecto al centro de masas) debe ser nulo. Los torques que ejercen las cuatro fuerzas son:

$$\vec{\tau}_1 = +F_1 d \hat{y}$$

$$\vec{\tau}_2 = -F_2 b \hat{y}$$

$$\vec{\tau}_p = 0$$

y

$$\vec{\tau}_r = -f_r h \hat{y} = -F_1 \mu_c h \hat{y} .$$

La suma de estos torques debe ser nulo, condición que nos entrega la relación

$$F_1 d - F_2 b - F_1 \mu_c h = 0 . \quad (9.13)$$

De las ecuaciones (9.12) y (9.13) se pueden despejar  $F_1$  y  $F_2$ , obteniéndose

$$F_1 = Mg \frac{b}{b + d - \mu_c h}$$

y

$$F_2 = Mg \frac{d - \mu_c h}{b + d - \mu_c h} .$$

Las ecuaciones anteriores dejan de ser válidas si  $\mu_c h > d$ , ya que en ese caso, la fuerza  $F_2$  se vuelve negativa, lo que significa que las ruedas traseras dejan de estar en contacto con el suelo. En otras palabras, las ecuaciones anteriores son válidas mientras  $d > \mu_c h$ , relación que favorece un diseño (del automóvil) en que el centro de masas se ubica en la parte trasera y cerca del suelo.

Conociendo  $F_1$  podemos calcular la fuerza de roce  $f_r$  (que es la fuerza responsable de la (des)aceleración del automóvil). Para la la aceleración se obtiene

$$\vec{a} = \frac{f_r}{M} \hat{x} = \frac{F_1 \mu_c}{M} \hat{x} = g \frac{b \mu_c}{b + d - \mu_c h} \hat{x} = a_0 \hat{x} .$$

Finalmente, la distancia  $D$  que recorre el automóvil durante su frenado es

$$D = \frac{v_0^2}{2a_0} = v_0^2 \frac{b + d - \mu_c h}{2gb\mu_c} .$$

Observe que en este problema la fuerza neta sobre el automóvil no es nula y, por lo tanto, el torque neto respecto a otro origen no es nulo aun cuando lo sea respecto al centro de masas. Confirme la aseveración anterior evaluando el torque respecto al punto de contacto de la rueda delantera con el suelo.

Reiteramos: Para determinar si cambiará el estado rotacional de un cuerpo acelerado, debe evaluarse el torque total **respecto al centro de masas** (ver también capítulo siguiente).

Analicemos ahora el proceso de aceleración. Sea ésta  $\vec{a} = -a_0 \hat{x}$ . Supongamos que el motor ejerce la fuerza sobre las ruedas traseras y que estas no resbalan. En ese caso la fuerza de roce (estática)  $\vec{f}_r = -f_r \hat{x}$  actuará sobre las ruedas traseras y en dirección  $-\hat{x}$ . Mientras el automóvil está con las cuatro ruedas sobre el suelo, el torque total respecto al centro de masas debe ser nulo, o sea,

$$F_1 d - F_2 b + f_r h = 0 .$$

La fuerza que acelera el automóvil es la fuerza de roce, es decir,

$$\vec{f}_r = M \vec{a} .$$

En la dirección vertical la suma de todas las fuerzas sobre el automóvil debe ser nula:

$$F_1 + F_2 = Mg .$$

Las tres últimas ecuaciones permiten determinar  $F_1$  y  $F_2$ :

$$F_1 = M \frac{gb - a_0 h}{b + d} ,$$

$$F_2 = M \frac{gd + a_0 h}{b + d} .$$

Observe que  $F_1$  es mayor que cero sólo mientras  $a_0 < gb/h$ . Para aceleraciones mayores, las ruedas delanteras del automóvil pierden contacto con el suelo. La aceleración máxima (si el roce estático lo permite) viene dada por

$$a_{\max} = g \frac{b}{h} .$$

### Solución al problema 29

El momento angular total debe conservarse. Inicialmente el momento angular es

$$L_i = I_1 \omega_0 = \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \omega_0 .$$

El momento angular una vez que el segundo disco este en reposo respecto al primero es

$$L_f = I \Omega ,$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la configuración final para rotaciones alrededor del eje fijo. Se tiene

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + \left( \frac{1}{2} m r^2 + m D^2 \right) ,$$

donde para  $I_2$  hemos usado el teorema de Steiner.

Igualando los dos momentos angulares se deduce

$$\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 = \left[ \frac{1}{2} M R^2 + \left( \frac{1}{2} m r^2 + m D^2 \right) \right] \Omega ,$$

o sea,

$$\Omega = \frac{m r^2 \omega_0}{m r^2 + M R^2 + 2 m D^2} .$$

### Solución al problema 35

En la figura 9.38 la rueda gira en el plano  $(x, z)$ , moviéndose la parte superior de la rueda hacia el lector. El momento angular debido al giro de la rueda alrededor de su eje, por lo tanto, apunta en la dirección  $\hat{y}$ .

Suponiendo que toda la masa de la rueda está concentrado en la periferia, su momento de inercia para rotaciones alrededor de su eje será

$$I_0 = MR^2 .$$

El momento angular asociado a este movimiento (para el instante mostrado en la figura 9.38), respecto al origen  $O$ , será

$$\vec{L}_0 = I_0\omega \hat{y} ,$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular con que gira la rueda alrededor de su eje (esto es,  $\omega = 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1}$ ).

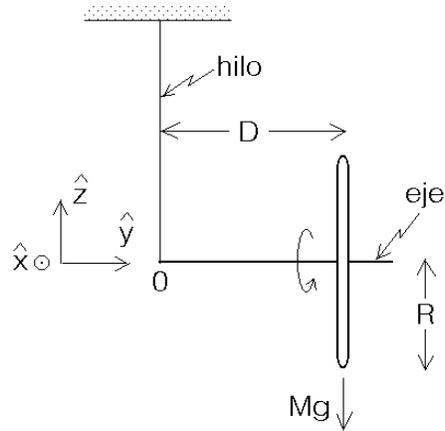


Figura 9.38

El torque total respecto a  $O$  es

$$\vec{\tau} = -MgD \hat{x} .$$

Pero, por otra parte,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} ,$$

luego el cambio de momento angular (para la situación mostrada en la figura 9.38) será

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -MgD \hat{x} .$$

Observe que  $\vec{L}$  y  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  son perpendiculares (ver también figura 9.39). Como  $\vec{L}$  y  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  están en el plano  $(x, y)$ , el vector  $\vec{L}$  seguirá en ese plano, pero cambiará su orientación. En otras palabras, el eje de la rueda girará en el plano  $(x, y)$ , manteniéndose horizontal.

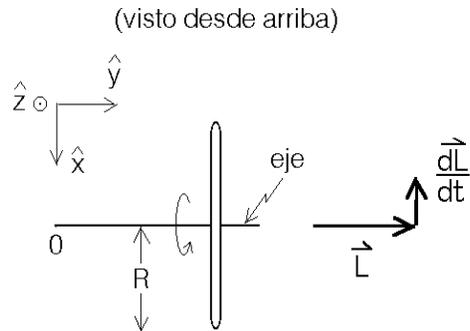


Figura 9.39

Para deducir la velocidad angular  $\Omega$  con la cual el eje de la rueda gira alrededor del eje  $\hat{z}$ , recordemos algunos aspectos del movimiento circular uniforme: Sea  $\vec{r}$  un vector de largo  $R$  que gira en el plano  $(x, y)$  con velocidad angular uniforme. En ese caso  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  es siempre perpendicular a  $\vec{r}$ . Si conocemos el radio de giro y la rapidez con que gira podemos determinar la velocidad angular:

$$\Omega = \frac{v}{R} = \frac{|d\vec{r}/dt|}{|\vec{r}|} .$$

La situación en el presente problema es análoga. Tenemos un vector  $\vec{L}$  que gira en el plano  $(x, y)$ . Conocemos  $L = |\vec{L}|$  y la rapidez  $|d\vec{L}/dt|$ , luego podemos encontrar la velocidad angular de *precesión*  $\Omega$  con la que gira  $\vec{L}$ :

$$\Omega = \frac{|d\vec{L}/dt|}{|\vec{L}|} = \frac{MgD}{MR^2\omega} = \frac{gD}{R^2\omega} .$$

Tanto más rápido gira la rueda, tanto más lento es la precesión.