Solución P2, Control 2:

Se elige sistema de coordenadas con el origen en el vértice inferior de la cuña. En la configuración inicial la energía del sistema es solamente potencial elástica:

$$E_i = \frac{K \cdot l^2}{2}$$

Donde $l = \dfrac{h}{sen(\alpha)}$, luego $E_i = \dfrac{K \cdot h^2}{2 \cdot sen^2(\alpha)}$

En una configuración posterior cualquiera a una altura "y" la energía tiene tres componentes: energía potencial elástica, gravitatoria y energía cinética:

$$E_f = \frac{K \cdot (h-y)^2}{2 \cdot sen^2(\alpha)} + mgy + \frac{mv^2}{2}$$

E_f difiere de E_i porque se ha disipado energía por roce. Al llegar a una altura "y" la masa a recorrido una distancia "y/sen(α)". El diagrama de fuerzas indica que se anula la suma de fuerzas perpendiculares a la superficie, por lo que la normal es:

$$N = mg \cdot \cos(\alpha)$$

La fuerza de roce cinético por lo tanto queda como:

$$F_{roce} = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot mg \cdot \cos(\alpha)$$

Luego la energía disipada por roce es:

$$W_{dis} = \frac{\mu_c mg \cdot \cos(\alpha) \cdot y}{sen(\alpha)}$$

La conservación de energía dice $E_i = E_f + W_{dis}$, luego

$$E_i = \frac{K \cdot h^2}{2 \cdot sen^2(\alpha)} = \left[\frac{K \cdot (h-y)^2}{2 \cdot sen^2(\alpha)} + mgy + \frac{m \cdot v^2}{2}\right] + \left[\frac{\mu_c mgy \cdot \cos(\alpha)}{sen(\alpha)}\right]$$

Simplificando un poco la expresión se obtiene:

$$\frac{K \cdot h^2}{sen^2(\alpha)} = \frac{K \cdot (h-y)^2}{sen^2(\alpha)} + m \cdot v^2 + 2mgy \cdot (1 + \mu_c \cdot \cot g(\alpha)) \quad (*)$$

i.- La condición límite para que llegue al borde es que lo haga con velocidad cero, por lo que en (*) se reemplaza y=h, v=0, luego:

$$\frac{K_0 h^2}{sen^2(\alpha)} = 2mgh(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha)) \Rightarrow K_0 = \frac{2mg\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha))\cdot sen^2(\alpha)}{h}$$

ii.- Si $K<K_0$, la masa se detiene (v=0) a una altura y tal que se cumple (*):

$$\frac{K\cdot h^2}{sen^2(\alpha)} = \frac{K\cdot(h-y)^2}{sen^2(\alpha)} + 2mgy\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha)) \quad o:$$

$$\underline{K\cdot h^2} = \underline{K\cdot h^2} - 2Kh\cdot y + K\cdot y^2 + 2mg\cdot y\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha))\cdot sen^2(\alpha)$$

Luego despejando y se obtiene:

$$y = 2h - \frac{2mg\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha))\cdot sen^2(\alpha)}{K}$$

iii.- Si $K>K_0$ la masa llega arriba con velocidad v, que se obtiene poniendo y=h en (*):

$$\frac{K\cdot h^2}{sen^2(\alpha)} = 2mgh\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha)) + m\cdot v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{K\cdot h^2}{m\cdot sen^2(\alpha)} - 2gh\cdot(1+\mu_c \cdot \cot g(\alpha))$$

Nota: 2 puntos cada parte

D.O.Q.