Examen MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre Otoño 2005

Prof: Marcelo Leseigneur
Auxs: Rodrigo Assar, Sebastián Court

Pregunta 1.-

(a) Calcular todos los puntos de la superficie $z = e^{x+y} + \sin(x-y)$ cuyo plano tangente es paralelo a $z = x + y$.

(b) Calcular los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ cuya distancia al origen es máxima y mínima, junto con el valor de dichas distancias.

Indicación: Recuerde que el plano tangente a $z = f(\vec{x})$ en un punto $(\vec{x_0}, f(\vec{x_0}))$ tiene como ecuación $z = T_{\vec{x_0}}(f)(\vec{x})$, donde $T_{\vec{x_0}}(f)(\vec{x})$ es la aproximación de Taylor de primer orden de f en torno a $\vec{x_0}$.

Pregunta 2.- Para el operador laplaciano $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en que f es una función de dos variables cualquiera de clase C^2.

(i) Considere las coordenadas polares

$$x = \rho \cos(\theta),$$

$$y = \rho \sin(\theta).$$

En que $\rho \in [0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.
Muestre que si se define $g(\rho, \theta) = f(x, y)$, para $\rho \neq 0$ se tiene que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

(ii) Considere las coordenadas elípticas

$$x = \cosh(u)\cos(v),$$

$$y = \sinh(u)\sin(v).$$

En que $u \in \mathbb{R}$ y $v \in [0, 2\pi)$.
Muestre que si se define $g(u, v) = f(x, y)$ entonces

$$\Delta f = \frac{1}{\sin^2(v) + \sinh^2(u)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Indicación: Recuerde que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(iii) Considere las coordenadas parabólicas

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2},$$
$$y = u \cdot v.$$

En que $u \in [0, \infty)$ y $v \in \mathbb{R}$.
Pruebe que si se define $g(u, v) = f(x, y)$ entonces se tienen las siguientes igualdades

$$(u^2 + v^2)\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

Pregunta 3.-

(a) Calcule la integral doble

$$\int\int_D \left(\frac{x + y}{x^2 + y^2}\right) dxdy,$$

donde D es la región del primer cuadrante comprendida entre el círculo de centro el origen y radio R y el semiplano definido por la recta de ecuación $x + y = R$ que no contiene al origen.

(b) Sea R la región de $\mathbb{R}^3$ interior al hexaedro de vértices $A = (2, 2, -4)$, $B = (1, 2, -3)$, $C = (2, 4, -6)$, $D = (4, 4, -8)$, $E = (2, 2, -8)$, $F = (1, 2, -6)$, $G = (2, 4, -12)$ y $H = (4, 4, -16)$. Determine, usando integrales triples, el volumen de R.

(c) Sea $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq 4(x^2 + y^2), -2 \leq z \leq 2\}$. Dibuje la región y calcule la siguiente integral:

$$\int\int_R\int (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

Tiempo: 3 hrs.