

PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2001/2002

Profesores responsables

<http://www.uv.es/anamat/pod.htm>

Práctica 1	Funciones de varias variables. Límites.	1
Práctica 2	Diferenciabilidad de funciones de varias variables	8
Práctica 3	La regla de la cadena. Cambio de coordenadas.	12
Práctica 4	Fórmula de Taylor. Extremos relativos y absolutos.	16
Práctica 5	El teorema de la función implícita.	23

Práctica 1

Funciones de varias variables.

Limites.

1 Subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Para poder estudiar funciones de varias variables necesitamos estudiar previamente los conjuntos entre los cuales actúan. Por cuestiones obvias de visualización trabajaremos con dos o con tres variables.

Ejemplo 1.1

Determinar el conjunto $U := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$.

Si consideramos la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, que corresponde a una circunferencia de centro el origen y radio tres, sabemos que la curva que representa divide al plano en tres regiones, a saber:

$C := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$, es decir la curva propiamente dicha.

$I := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9\}$, los puntos de su “interior” o aquéllos cuya distancia al origen es menor que tres.

$E := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\}$, los puntos de su “exterior” o aquéllos cuya distancia al origen es mayor que tres.

En nuestro caso $U = C \cup E$. El conjunto es cerrado y no acotado.

Ejemplo 1.2

Determinar el conjunto $U := \{(x, y) \mid x + y \leq 5, \quad y > x^2 - 1\}$.

La recta $x + y = 5$ queda determinada por dos de sus puntos, por ejemplo $(0, 5)$ y $(5, 0)$, y divide al plano en tres regiones, a saber:

$R := \{(x, y) \mid x + y = 5\}$, formada por los puntos de la propia recta.

$P_1 := \{(x, y) \mid x + y < 5\}$, formada por el semiplano que contiene al $(0, 0)$ (punto que no está en R y que nos sirve de test).

$P_2 := \{(x, y) \mid x + y > 5\}$, formada por el semiplano que no contiene al $(0, 0)$.

La parábola $y = x^2 - 1$ tiene su vértice en $(0, -1)$ y tiene la convexidad hacia las ordenadas negativas. Divide al plano en tres regiones:

$P := \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$, los puntos de la parábola.

$I := \{(x, y) \mid y > x^2 - 1\}$, los puntos de la parte cóncava, como por ejemplo es el $(0, 0)$.

$E := \{(x, y) \mid y < x^2 - 1\}$, los puntos de la parte convexa.

En nuestro caso $U = (R \cup P_1) \cap I$, que no es ni abierto ni cerrado pero acotado.

Ejemplo 1.3

Determinar el conjunto $U := \{(x, y, z) \mid z \geq x^2 + y^2\}$.

Visualizaremos el conjunto U estudiando sus secciones o cortes horizontales y verticales. Consideremos la superficie determinada por $z = x^2 + y^2$.

Si cortamos por un plano horizontal $z = a$, es decir, buscamos los puntos (x, y, a) tales que $a = x^2 + y^2$, vemos que no tiene sentido si $a < 0$, es el origen si $a = 0$, y si $a > 0$ se trata de una circunferencia de centro $(0, 0, a)$ y radio \sqrt{a} . Este proceso que reencontraremos más tarde se denomina estudio de las curvas de nivel.

Si cortamos por un plano vertical, por ejemplo el $x = b$ o el $y = c$, nos encontramos en ellos con sendas parábolas. Concluimos pues que se trata de un paraboloide que determina una partición del espacio en tres conjuntos, a saber:

$P := \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}$, los puntos del paraboloide.

$I := \{(x, y, z) \mid z < x^2 + y^2\}$, el “exterior” o parte cóncava del paraboloide.

$E := \{(x, y, z) \mid z > x^2 + y^2\}$, el “interior” o parte convexa del paraboloide. Así $U = P \cup E$. Es un conjunto cerrado y no acotado.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.1

Determinar los siguientes subconjuntos:

- (1) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \quad x + y \geq 1\}$.
- (2) $\{(x, y) \mid 4x^2 + 7y^2 \leq 2, \quad x \geq 0\}$.
- (3) $\{(x, y) \mid x^2 \geq y, \quad x + y \leq 3\}$.
- (4) $\{(x, y) \mid xy \geq 1\}$.
- (5) $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 3\}$.
- (6) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2\}$.
- (7) $\{(x, y, z) \mid 1 \leq xy \leq 2, \quad x \leq y \leq 4x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.
- (8) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.
- (9) $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + 7z^2 \leq 1, \quad x + y + z \geq 0\}$.
- (10) $\{(x, y, z) \mid 4x^2 - 5y^2 = z\}$.

2 Dominio, rango y gráfica de una función de varias variables.

Una función f de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^m suele venir dada por una o varias expresiones o fórmulas. Llamaremos *dominio* D al subconjunto de \mathbf{R}^n en el que tengan sentido tales expresiones. Al subconjunto de \mathbf{R}^m $f(D)$ le denominaremos *rango*. La *gráfica* de f será

$$G(f) := \{(x; f(x)) \in \mathbf{R}^{n+m} \mid x \in D, \quad y = f(x)\}.$$

Como en el apartado anterior nuestro estudio se restringirá a los casos $n = 1, 2, 3$ y $m = 1$ para obtener una cierta visualización.

Ejemplo 1.4

Sea $f(x, y) := \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

El dominio de definición de f será

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 25 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\},$$

es decir, la región encerrada por la circunferencia de centro el origen y radio cinco.

Su rango será $R = \{z \in \mathbf{R} \mid 0 \leq z \leq 5\}$, mientras la gráfica será

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D, \quad z = f(x, y)\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad 0 \leq z \leq 5\},$$

que es la semiesfera superior de centro el origen y radio cinco.

En general a los conjuntos $f(x_1, \dots, x_n) = c$ se les denomina *conjuntos de nivel* y en particular si $n = 2$ *curvas de nivel*; sirven para hacerse una idea de la gráfica de la función (como hemos hecho con el conjunto del ejemplo 3 de la sección anterior). En nuestro caso las curvas de nivel son las circunferencias determinadas por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 25 - c^2$, ($0 \leq c \leq 5$). Para $n = 3$ se denominan *superficies de nivel*. Por ejemplo la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, cuya gráfica al estar en \mathbf{R}^4 nos es imposible de visualizar, tiene como superficies de nivel esferas de centro el origen.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.2

Determinar el dominio, rango y trazar las curvas de nivel de las funciones:

- (1) $f(x, y) := x + y$.
- (2) $f(x, y) := x^2 + 4y^2$.
- (3) $f(x, y) := x^2 - y^2$.
- (4) $f(x, y) := xy$.
- (5) $f(x, y) := \sqrt{9 - 3x^2 - y^2}$.

3 Límites de funciones de varias variables.**3.1 Límites por curvas.**

Sea $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ entonces para toda función real y continua g definida en un entorno de a , tal que $g(a) = b$, se cumple $\lim_{x \rightarrow a} f(x, g(x)) = L$. Geométricamente esto significa que el límite a lo largo de cualquier curva $y = g(x)$ debe ser L .

Ejemplo 1.5

Consideremos la función

$$f(x, y) := \frac{y}{y + x^2} \quad \text{si } y \neq -x^2; \quad f(x, -x^2) = 1.$$

Veamos que no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: si hacemos $y = g(x) = mx^2$, es decir, tomamos las parábolas que pasan por el origen,

$$f(x, mx^2) = \frac{m}{m+1} \quad \text{si } m \neq -1$$

con lo que el límite depende de m .

3.2 Límites iterados.

Dada una función f de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} , sean

$$f_1(x) := \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad f_2(y) := \lim_{x \rightarrow a} f(x, y).$$

Se llaman límites iterados de f en (a, b) a

$$L_1 := \lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \quad L_2 := \lim_{y \rightarrow b} f_2(y).$$

Si la función f tiene límite L en (a, b) y existen $f_1(x)$ y $f_2(y)$ entonces existen L_1 y L_2 siendo ambos iguales a L .

Ejemplo 1.6

Sea

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

En $(0, 0)$ existen los límites iterados (con la notación anterior $L_1 = 1$ y $L_2 = -1$) pero no existe el límite pues tomando las rectas $y = mx$ el límite depende de m .

Ejemplo 1.7

Si consideramos la función

$$f(x, y) := y \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0, y) = 0,$$

como $|f(x, y)| \leq |y| \leq \|(x, y)\|$, tiene límite igual a cero en $(0, 0)$, pero L_2 no existe.

Ejemplo 1.8

La función

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0$$

tiene límites iterados en $(0, 0)$ iguales a cero pero no tiene límite (considerar de nuevo las rectas $y = mx$).

3.3 Definición y método $\epsilon - \delta$. Método general.

Trabajaremos en el caso particular de una función real de dos variables.

Son equivalentes:

$$(a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L,$$

$$(b) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon,$$

$$(c) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x-a| < \delta \quad , \quad |y-b| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Para acotar convenientemente recurriremos a

(1) Utilización de acotaciones del tipo

$$|x| \leq \sqrt[p]{x^p + \dots}$$

(2) Utilización de límites conocidos, por ejemplo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

(3) Utilización de desarrollos de Taylor, por ejemplo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O_6.$$

(4) Utilización del Teorema del Valor Medio de Cauchy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad z \in]x, y[.$$

Ejemplo 1.9

Sea $f(x, y) := x^2 + xy + y$. Vamos a calcular, usando la definición,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} f(x, y).$$

Solución: Como el candidato natural a límite es 3 (¿porqué?) calibraremos

$$\begin{aligned} |x^2 + xy + y - 3| &\leq |x^2 - 1| + |xy - 1| + |y - 1| = |(x-1)(x+1)| + |xy - x + x - 1| + |y - 1| \leq \\ &\leq |x-1||x+1| + |y-1||x| + |x-1| + |y-1| \leq |x-1|(|x-1| + 2) + |y-1|(|x-1| + 1) + \\ &\quad + |x-1| + |y-1| \end{aligned}$$

Si suponemos $|x-1| < \delta$, $|y-1| < \delta$, se tiene suponiendo $\delta < 1$

$$|x^2 + xy + y - 3| \leq \delta(\delta + 2) + \delta(\delta + 1) + 2\delta = 2\delta^2 + 5\delta < 7\delta.$$

Por lo tanto, dado ϵ , si tomamos $0 < \delta < \min(1, \frac{\epsilon}{7})$ se cumple la definición.

Ejemplo 1.10

Determinar para que valores de $\alpha \in \mathbf{R}$ existe el límite en $(0,0)$ de la función:

$$f(x, y) := \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^6 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Como $|x| \leq (x^6 + y^2)^{\frac{1}{6}}$, $|y| \leq (x^6 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ se tiene:

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^6 + y^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^6 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{x^6 + y^2} = (x^6 + y^2)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$$

Según lo anterior, si $\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3} > 0$, esto es, si $\alpha > \frac{4}{3}$, como la expresión de la derecha tiende a cero la función tiene por límite cero, y es continua.

Si $\alpha \leq \frac{4}{3}$ hagamos $y = mx^3$,

$$f(x, mx^3) = |x|^{3\alpha-4} \frac{|m|^\alpha}{1+m^2}$$

y entonces:

si $\alpha = \frac{4}{3}$ el límite de $f(x, mx^3)$ depende de m y la función no es continua al no tener límite,
si $\alpha < \frac{4}{3}$ el límite de $f(x, mx^3)$ es infinito y tampoco es continua.

3.4 Cambio a coordenadas polares.

Sean $A := \{(\rho, \theta) : \rho > 0, \theta \in]0, 2\pi]\}$ y $B := \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$, definamos :

$$g(\rho, \theta) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

donde g es una biyección continua de A en B de forma que si

$$C(\epsilon) := \{(\rho, \theta) \in A : 0 < \rho < \epsilon, 0 < \theta \leq 2\pi\}$$

entonces $g(C(\epsilon)) = \{(x, y) : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon\}$.

Sea f una función de B en \mathbf{R} y $F := f \circ g$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |F(\rho, \theta) - L| < \epsilon, \quad \text{si } 0 < \rho < \delta,$$

uniformemente para $\theta \in]0, 2\pi]$.

Ejemplo 1.11

Consideremos las funciones

$$(i) \quad f(x, y) := \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$(ii) \quad f(x, y) := \frac{y}{x} \text{sen}(x^2 + y^2) \quad \text{si } x \neq 0; \quad f(0, y) = 0$$

Si buscamos sus límites en $(0,0)$ observamos que, en el primer caso, la correspondiente $F(\rho, \theta) = \frac{\text{sen} \rho^2}{\rho^2}$ tiene límite 1 sin depender del valor de θ , mientras que la correspondiente $F(\rho, \theta) = \text{tg} \theta \cdot \text{sen} \rho^2$ tiende a cero con ρ pero dependiendo del valor de θ .

PROBLEMAS PROPUESTOS:**Ejercicio 1.3**

Estudiar la existencia del límite en $(0,0)$ de las funciones:

$$(i) \quad f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0,$$

$$(ii) \quad f(x, y) := \frac{x^2 y^3}{y^6 + x^4} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Ejercicio 1.4

Si

$$f(x, y) := \frac{2x + y^2}{1 + x^2 + y^3},$$

demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 1.$$

Ejercicio 1.5

Si

$$f(x, y) := xy,$$

demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = ab.$$

Ejercicio 1.6Determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbf{R}$ es continua en $(0,0)$ la función

$$f(x, y) := \frac{x |y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Ejercicio 1.7Determinar si existe límite en $(0,0)$ de la función

$$f(x, y) := \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Sugerencia: se puede resolver este ejercicio de tres maneras que en el fondo son la misma

(a) Como

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^{\frac{1-\cos x}{x^2}} - xy^2 \frac{1-\cos y}{y^2}}{x^2 + y^2},$$

utilizar que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$ y acotar.

(b) Una alternativa es usar el desarrollo de Mc Laurin del coseno

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + R_2.$$

(c) Por coordenadas polares.

Ejercicio 1.8Determinar si existe límite en $(0,0)$ de

$$f(x, y) := \frac{x^4 + \operatorname{sen} y^4}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

Ejercicio 1.9Determinar si existe límite en $(0,0)$ de

$$f(x, y) := \frac{1 + x - \cos(x^2 + y^2) - \arctan x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = a.$$

Ejercicio 1.10

Determinar si existe límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} :

- (i) $f(x, y) := \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xy), \quad x \neq 0; \quad f(0, y) = 0.$
- (ii) $f(x, y) := \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = a.$
- (iii) $f(x, y) := \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$
- (iv) $f(x, y) := \frac{(x \cdot y)^2}{(x \cdot y)^2 + (x - y)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$
- (v) $f(x, y) := \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}, \quad \text{si } \operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg} y; \quad f(x, y) = \cos^3 x \quad \text{si } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y.$

Ejercicio 1.11

Determinar si existe límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} y razonar sobre su continuidad:

- (i) $f(x, y) := \frac{x \operatorname{sen} y + y}{|x| + |y|}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = a.$
- (ii) $f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^6 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$
- (iii) $f(x, y) := \frac{x^2 y + x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$
- (iv) $f(x, y) := \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 1.$
- (v) $f(x, y) := \frac{\operatorname{sen} x^3 - \operatorname{tg} y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$

Práctica 2

Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1 Derivadas parciales.

Sea $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, siendo D un subconjunto abierto de \mathbf{R}^2 . Se llaman derivadas parciales primeras en el punto $(a, b) \in D$ a

$$D_1 f(a, b) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}, \quad D_2 f(a, b) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}.$$

De forma similar se definirán tres derivadas parciales primeras si D es un subconjunto de \mathbf{R}^3 y, en general, n derivadas parciales si D está en \mathbf{R}^n .

2 Derivadas direccionales.

Sea $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, siendo D un subconjunto abierto de \mathbf{R}^2 . Se llama derivada direccional de f en la dirección $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$, en el punto $(a, b) \in D$ a

$$D_v f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}.$$

3 Gradiente.

Se llama gradiente de una función real f en un punto x al vector cuyas componentes son las derivadas parciales en ese punto. Se denota por $\nabla f(x)$.

Gométricamente sabemos que es en la dirección del gradiente, si es no nulo, cuando la derivada direccional se hace máxima.

4 La diferencial.

Sea $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, siendo D un subconjunto abierto de \mathbf{R}^2 . Se llama diferencial de f en $(a, b) \in D$ a una función lineal de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R} , que será por lo tanto de la forma $T(h, k) = Ah + Bk$, tal que para $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ se tenga

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = T(h, k) + \|(h, k)\| E(h, k),$$

siendo $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} E(h, k) = 0$. Se dice entonces que f es diferenciable en (a, b) y se denota $T := df(a, b)$.

Es importante destacar las siguientes propiedades:

- (i) Si f es diferenciable en (a, b) , es continua en él.
- (ii) Si f es diferenciable en (a, b) , $A = D_1 f(a, b)$, $B = D_2 f(a, b)$.
- (iii) Si f es diferenciable en (a, b) , existen $D_v f(a, b) = df(a, b)(v)$.
- (iv) Si las derivadas parciales de f en (a, b) existen y son continuas en él entonces f es diferenciable en dicho punto.

5 Derivabilidad compleja. Ecuaciones de Cauchy Riemann.

Sea $f: D \rightarrow \mathbf{C}$, siendo D un subconjunto abierto de \mathbf{C} . Se dice que f es derivable en $z_0 \in \mathbf{C}$ si existe el siguiente límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que se denota por $f'(z_0)$ y que llamaremos derivada de f en z_0 .

Obviamente si f es derivable en z_0 entonces es continua en dicho punto.

El álgebra de derivadas es el mismo que para la derivación real, al igual que la regla de la cadena.

La relación con la diferenciabilidad en \mathbf{R}^2 (identificamos f con la función $(\text{Re}f, \text{Im}f) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ que a cada (x, y) le asocia $(\text{Re}f(x + iy), \text{Im}f(x + iy))$) viene dada por el siguiente resultado:

f es derivable en z_0 si y sólo si $(\text{Re}f, \text{Im}f)$ es diferenciable en $(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0)$ y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$D_1(\text{Re}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0) = D_2(\text{Im}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0),$$

$$D_2(\text{Re}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0) = -D_1(\text{Im}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0).$$

$$\text{Además, } f'(z_0) = D_1(\text{Re}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0) + iD_1(\text{Im}f)(\text{Re}z_0, \text{Im}z_0).$$

6 Funciones de clase C^1 .

Una función se dice que es de clase C^1 en un conjunto si existe un abierto conteniendo dicho conjunto en el que existen las derivadas parciales de la función y son continuas. Por la propiedad (iv) de la diferencial tal función es diferenciable en todos los puntos del conjunto.

Ejemplo 2.1

Sea la función

$$f(x, y) := \frac{x^4 + \text{sen}y^4}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) := 0.$$

Sabemos por el ejercicio 1.8 de la Práctica 1 que la función es continua en el origen. Estudiemos ahora sus derivadas direccionales:

Sea $v := (v_1, v_2)$ un vector no nulo, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 v_1^4 + \text{sen}t^4 v_2^4}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{v_1^4 + \frac{\text{sen}t^4 v_2^4}{t^4} v_2^4}{v_1^2 + v_2^2} = 0.$$

Luego $D_v f(0, 0) = 0$. Sabemos así que la candidata a diferencial de f en el origen es $T(h, k) = 0h + 0k = 0$, es decir, la función idénticamente nula. Notemos que si f no fuese continua automáticamente no sería diferenciable.

Si f es diferenciable en $(0, 0,)$ deberá existir $E(h, k)$ tal que $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} E(h, k) = 0$ con

$$f(h, k) = 0h + 0k + \sqrt{h^2 + k^2} E(h, k)$$

para h y k suficientemente pequeños, es decir, deberá ser

$$E(h, k) = \frac{h^4 + \text{sen}k^4}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $|\frac{\text{sen}k^4}{k^4}| \leq 1$, podemos acotar

$$|E(h, k)| \leq \frac{h^4 + k^4}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{h^2 + k^2},$$

lo que asegura la tendencia a cero de $E(h, k)$ y la diferenciabilidad de f .

Estudiemos ahora el carácter de las derivadas parciales:

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene

$$D_1 f(x, y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2x \operatorname{sen} y^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

que es continua, mientras que, como hemos visto, $D_1 f(0, 0) = 0$. Vamos a ver que la función $g(x, y) := D_1 f(x, y)$ también es continua en el origen:

Como $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, se tiene

$$\begin{aligned} |D_1(x, y)| &\leq \frac{2|x|^5 + 4|x|^3|y|^2 + 2|x||y|^4 \left| \frac{\operatorname{sen} y^4}{y^4} \right|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq \\ &\leq \frac{2(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} + 4(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} + 2(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}{(x^2 + y^2)^2} = 8\sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

lo que nos asegura que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = g(0, 0)$ y $D_1 f$ es continua en el origen. Igual se haría con $D_2 f$. Por lo tanto f es de clase C^1 en todo el plano.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 2.1

Calcular, usando la definición, las derivadas parciales en (a, b) de la función

$$f(x, y) := 5x^2 + 3xy - 4y^3.$$

Analizar, a la vista del resultado el siguiente aserto: “Para derivar parcialmente una función con respecto a una variable se suponen constantes el resto de variables y se deriva con respecto a ella como si se tratara de una función de una variable.”

Ejercicio 2.2

Calcular las derivadas direccionales en el $(0, 0)$ de las funciones:

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) := 0,$$

$$g(x, y) := y \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, \text{ si } x \neq 0; \quad g(0, y) := 0.$$

Según los resultados obtenidos, y comparando con los obtenidos en la práctica anterior, deducir si cabe alguna relación entre el hecho de que una función sea continua en un punto y el de que tenga derivadas direccionales en él.

Ejercicio 2.3

Calcular el vector gradiente de las funciones:

$$f(x, y, z) := x^{y^z} \text{ en } (1, 1, 1),$$

$$g(x, y) := \log(x^2 + 2y + 1) + \int_0^x \cos t^2 dt \text{ en } (1, 1).$$

Ejercicio 2.4

Determinar los valores de a , b y c para los que la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) := axy^2 + byz + cz^2x^3$$

tenga en $(1, 2, -1)$ un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje Z .

Ejercicio 2.5

La temperatura de cada una de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función $T(x, y) := (x - 1)^3(y - 2)^2$. Se desea conocer cuáles son, en el punto $(0, 0)$, las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.

Ejercicio 2.6

Denotemos por $z := 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x, y) . ¿En qué dirección desde $(1, 0)$ deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?

Ejercicio 2.7

Hallar el plano tangente a las gráficas de las funciones:

$$f(x, y) := 2xy^2 + x^2y \text{ en el punto } (1, -1, 1),$$

$$g(x, y) := x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2 \text{ en el punto } (1, 1, 2).$$

Ejercicio 2.8

Hallar los puntos de la superficie $z := 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ en los que el plano tangente es horizontal.

Ejercicio 2.9

Estudiar la existencia de derivadas parciales, direccionales, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales en el origen de la función

$$f(x, y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) := 0.$$

Ejercicio 2.10

Idem de $f(x, y) := \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$.

Ejercicio 2.11

Idem de $f(x, y) := \frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$.

Ejercicio 2.12

Idem de $f(x, y) := xy \log(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$.

Ejercicio 2.13

Idem de $f(x, y) := x + x^2y \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$.

Ejercicio 2.14

Idem de $f(x, y) := \frac{x|y|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$

Ejercicio 2.15

Idem de $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) := 0$.

Ejercicio 2.16

Demostrar que la función definida por $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$ es derivable compleja y calcular su derivada.

Ejercicio 2.17

Estudiar en qué puntos son diferenciables y en qué puntos son derivables las siguientes funciones:

$$f(x + iy) = x^2 + 2x - iy,$$

$$g(x + iy) = x^2 + y^2.$$

Ejercicio 2.18

Demostrar que la función conjugado y las funciones parte real y parte imaginaria son diferenciables en todo punto pero que no son derivables en ninguno.

Ejercicio 2.19

Probar que la siguiente función cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(0, 0)$ pero que no es derivable compleja:

$$f(x + iy) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } x + iy \neq 0, f(0) = 0.$$

Práctica 3

La regla de la cadena. Cambio de coordenadas.

Al igual que para el caso de funciones reales de variable real, es muy útil tener una fórmula para el cálculo de la diferencial de la composición de funciones. Es esta la conocida como *regla de la cadena* o *Teorema de la función compuesta*.

1 La regla de la cadena.

Sean U y V subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente. Si las aplicaciones $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ son diferenciables en $x_0 \in U$ y $f(x_0) \in V$, respectivamente. Entonces la aplicación $h := g \circ f$ es diferenciable en x_0 , y además

$$Dh(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Supongamos que estamos bajo las hipótesis de la regla de la cadena, entonces, teniendo en cuenta que la matriz asociada a la composición de dos aplicaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a dichas aplicaciones lineales, tenemos que las matrices Jacobianas cumplen la siguiente relación, conocida como **forma matricial de la regla de la cadena**

$$(1) \quad h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Esta ecuación matricial nos da un conjunto de ecuaciones escalares que son las que nos interesan en la práctica. En efecto: Sean $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_k)$ $h = (h_1, \dots, h_k)$, y sea $y_0 = f(x_0)$. Entonces la ecuación (1) nos queda como

$$\begin{pmatrix} D_1 h_1(x_0) & D_2 h_1(x_0) & \cdots & D_n h_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 h_k(x_0) & D_2 h_k(x_0) & \cdots & D_n h_k(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 g_1(y_0) & D_2 g_1(y_0) & \cdots & D_m g_1(y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g_k(y_0) & D_2 g_k(y_0) & \cdots & D_m g_k(y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & D_2 f_1(x_0) & \cdots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & D_2 f_m(x_0) & \cdots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

De donde, teniendo en cuenta la regla de multiplicación de matrices, nos quedan las ecuaciones

$$(2) \quad D_i h_j(x_0) = \sum_{r=1}^m D_r g_j(y_0) D_i f_r(x_0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Que escritas en la otra notación nos quedan como

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{r=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial y_r}(y_0) \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(x_0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Ejemplo 3.1

Supongamos que $f(x, y) := (x^2 + 1, y^2)$ y $g(u, v) := (u + v, u, v^2)$. Sea $h := g \circ f$. Vamos a calcular, usando la regla de la cadena $h'(1, 1)$. Tenemos que

$$g'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

y

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Cuando $(x, y) = (1, 1)$, $f(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Por tanto,

$$h'(1, 1) = g'(2, 1) f'(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora como usar la regla de la cadena para efectuar un **cambio de variables**. Supongamos que tenemos la función $z = z(x, y)$ y que queremos hacer el cambio de variable $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x, y) & \mapsto & z(x, y). \end{array}$$

Por tanto, aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

Para que este sistema, con incógnitas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, tenga solución se tiene que cumplir que

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si se cumple esta condición, aplicando la regla de Cramer obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Este método es válido para tres o más variables. Como aplicación veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2

Vamos a transformar la expresión $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$ mediante el cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. En este caso tenemos que

$$J := \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} (\rho \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta}). \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ -\rho \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} (\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} + \rho \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = \rho \cos \theta \frac{1}{\rho} (\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} + \rho \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho}) - \rho \sin \theta \frac{1}{\rho} (\rho \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta}) = \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

Ejemplo 3.3

Este ejemplo ilustra del riesgo que se corre al denotar las funciones por medio de variables reales. Sea $w = f(x, y, z)$ y $z = g(x, y)$. Entonces, aplicando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Ahora, como $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, obtenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},$$

con lo cual

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Pero si $w = x + y + z$ y $z = x + y$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

¿Donde está el error? Para resolverlo, vamos a plantear el mismo problema pero con notación funcional. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, g(x, y)) & \mapsto & f(x, y, g(x, y)). \end{array}$$

Sea $F := f \circ h$. Entonces, aplicando la regla de la cadena nos queda que

$$\begin{pmatrix} D_1 F & D_2 F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f & D_2 f & D_3 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 h_1 & D_2 h_1 \\ D_1 h_2 & D_2 h_2 \\ D_1 h_3 & D_2 h_3 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual,

$$D_1 F = D_1 f_1 D_1 h_1 + D_2 f D_1 h_2 + D_3 f D_1 h_3.$$

Entonces, tomando $h_1(x, y) = x$, $h_2(x, y) = y$ y $h_3(x, y) = g(x, y)$, nos queda que

$$D_1 F = D_1 f + D_3 f D_1 g.$$

Por tanto, el error lo hemos cometido por igualar $D_1 F$ con $D_1 f$.

EJERCICIOS PROPUESTOS:**Ejercicio 3.1**

Sean $f(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ y $g(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Demostrar que $\Delta f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, y que $\Delta g(x, y, z) = 0$, $\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, siendo Δ el operador de Laplace definido como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ejercicio 3.2

Sean $f(x, y, z) := (\sin(xy + z), (1 + x^2)^{yz})$ y $g(u, v) := (u + e^v, v + e^u)$. Calcular $(D(g \circ f))(1, -1, 1)(0, 1, 1)$.

Ejercicio 3.3

Supongamos que $u(x, t)$ satisface la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y que x , como función $x = f(t)$, satisface $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$. Probar que $u(f(t), t)$ es constante en t .

Ejercicio 3.4

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 3$, con $f(x) = g(\|x\|)$, siendo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 .

(i) Probar que

$$\Delta f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r), \quad r = \|x\| \neq 0.$$

(ii) Probar que si $\Delta f = 0$ entonces existen constantes a y b , tales que

$$f(x) = \frac{a}{\|x\|^{n-2}} + b, \quad x \neq 0.$$

Ejercicio 3.5

Suponiendo que f es de clase C^2 , transformar la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

mediante el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$.

Ejercicio 3.6

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$ siendo $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $g_2(x, y, z) = x + y + z$. Demostrar que si $h = f \circ g$, entonces

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 g_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

Ejercicio 3.7

Siendo z de clase C^2 , transformar el Laplaciano de z

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

mediante el cambio a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Ejercicio 3.8

Sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Transformar el Laplaciano de g

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

mediante el cambio a coordenadas esféricas $x = \rho \cos \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$.

Ejercicio 3.9

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado m si $f(tx) = t^m f(x) \quad \forall t > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable, demostrar que

$$f \text{ es homogénea de grado } m \iff mf(x) = \sum_{i=1}^n D_i f(x) x_i.$$

Ejercicio 3.10

Calcular una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumpla la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0.$$

Sugerencia: cambio $u = xy$, $v = x + y$

Ejercicio 3.11

Calcular la solución general de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Sugerencia: cambio $\alpha = x + ct$, $\beta = x - ct$

Práctica 4

Fórmula de Taylor. Extremos relativos y absolutos.

1 Fórmula de Taylor.

En el desarrollo del cálculo, la aproximación de funciones arbitrarias por polinomios ha sido siempre una tarea destacable, ya que éstos son fácilmente computables en cualquier punto. Una de estas aproximaciones se estudia en el cálculo básico mediante los polinomios de Taylor. Más concretamente, para una función de una variable real f de clase C^{q+1} se tiene

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \dots + \frac{1}{q!}f^{(q)}(x)h^q + R(x, h)$$

siendo $R(x, h)$ el denominado *Resto*, que determina el error, y se puede establecer aproximadamente de diferentes maneras. La más conocida es el *resto de Lagrange* en la que

$$R(x, h) = \frac{1}{(q+1)!}f^{(q+1)}(x+\theta h)h^{q+1}, \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

El polinomio P_q que resulta como aproximación de f se denomina *Polinomio de Taylor de orden q* . Se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - P_q(x, h)}{|h|^q} = 0,$$

situación que caracteriza a dicho polinomio entre todos los de grado q .

En el caso de una función de clase C^∞ , y si el resto tiende a cero al crecer q , se tiene la expresión como serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Para funciones de dos variables de clase C^{q+1} se tiene la expresión

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[D_1f(x_0, y_0)(x-x_0) + D_2f(x_0, y_0)(y-y_0)] + \\ & \frac{1}{2!}[D_{11}f(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + 2D_{12}f(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + D_{22}f(x_0, y_0)(y-y_0)^2] + \\ & \frac{1}{3!}[D_{111}f(x_0, y_0)(x-x_0)^3 + 3D_{112}f(x_0, y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \\ & 3D_{122}f(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + D_{222}f(x_0, y_0)(y-y_0)^3] + \\ & \frac{1}{4!}[\dots] + \dots + \frac{1}{q!}[\dots] + R_q, \end{aligned}$$

siendo $R_q = \frac{1}{(q+1)!}[\dots]$, con el corchete involucrando a las derivadas parciales de orden $q+1$ actuando en un punto localizado en el segmento que une (x, y) con (x_0, y_0) , y cumpliéndose que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R_q}{\|(x-x_0, y-y_0)\|^q} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - P_q}{\|(x-x_0, y-y_0)\|^q} = 0$$

lo que caracteriza al polinomio P_q entre todos los de grado q .

Escriba el lector la situación para una función de tres variables.

Ejemplo 4.1

Probar que si $|x| < \frac{1}{10}$ y $|y| < \frac{1}{10}$, entonces

$$|e^x \sin(x+y) - (x+y)| < 0,05.$$

Solución: Si tomamos la función $f(x, y) = e^x \sin(x+y)$ se tiene que

$$D_1 f(x, y) = e^x [\sin(x+y) + \cos(x+y)],$$

$$D_2 f(x, y) = e^x \cos(x+y),$$

$$D_{11} f(x, y) = 2e^x \cos(x+y),$$

$$D_{12} f(x, y) = e^x [\cos(x+y) - \sin(x+y)],$$

$$D_{22} f(x, y) = -e^x \sin(x+y),$$

con lo que el desarrollo de Taylor de orden 1 en $(0, 0)$ será

$$e^x \sin(x+y) = x+y + R_1.$$

Al estar las segundas derivadas acotadas por $2e^x$ se tiene que

$$|R_1| \leq \frac{1}{2} \cdot 4.2 \cdot e^{0,1} \cdot (0,1)^2 = 0,044 < 0,05.$$

Ejemplo 4.2

Hallar el polinomio de Taylor de orden q en el origen de la función

$$f(x, y) = e^{x+y}.$$

Solución: La función coincide con todas sus derivadas parciales, luego tanto ella como sus derivadas valen la unidad en el origen. Así

$$e^{x+y} = 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{1}{q!}(x+y)^q + R_q$$

Abreviadamente el polinomio es

$$P_q = \sum_{n=0}^q \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Compruebe el lector que si $f(x, y, z) := e^{x+y+z}$ se tendrá

$$P_q = \sum_{n=0}^q \frac{(x+y+z)^n}{n!}$$

lo que permite una extensión al caso de más variables.

Otra forma de encontrar estos polinomios de Taylor es la siguiente: si usamos que $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+R(t)$, siendo $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$, sustituyendo $t = x+y$ y multiplicando los desarrollos se tiene

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + R_2(x, y)$$

siendo, como se puede comprobar,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

y por la unicidad del polinomio de Taylor se deduce que $1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2}$ es el de orden 2.

Ejemplo 4.3

Escribir el desarrollo de Taylor de orden 1 de $f(x, y) := \log(x + e^y)$ en el $(1, 0)$.

Solución: calculando

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{x + e^y}, \quad D_2 f(x, y) = \frac{e^y}{x + e^y}, \quad D_{11} f(x, y) = \frac{-1}{(x + e^y)^2},$$

$$D_{12} f(x, y) = \frac{-e^y}{(x + e^y)^2}, \quad D_{22} f(x, y) = \frac{x e^y}{(x + e^y)^2}$$

y particularizando a $x = 1$ e $y = 0$ y haciendo $x := 1 + h$, $y = k$ se tiene para $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned} \log((1 + h) + e^k) &= \log 2 + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{h^2}{(1 + \theta h + e^{\theta k})^2} + \frac{2 h k e^{\theta k}}{(1 + \theta h + e^{\theta k})^2} - \frac{(1 + \theta h) e^{\theta k} k^2}{(1 + \theta h + e^{\theta k})^2} \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4

Calcular

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\log \frac{(x + e^y)}{2} - \frac{(x + y - 1)}{2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}.$$

Solución: Tomando, como en el problema anterior, $x = 1 + h$ e $y = k$ y haciendo $R(h, k) := \log((1 + h) + e^k) - \log 2 - \frac{h}{2} - \frac{k}{2}$ el límite se transforma en

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{R(h, k)}{\|(h, k)\|}$$

que sabemos que es cero por la fórmula de Taylor.

Ejemplo 4.5

Demostrar que si x e y son reales arbitrarios

$$\sin(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^{2n+1}}{(2n + 1)!}.$$

Solución: Si calculamos el polinomio de Taylor en el origen de orden $q = 2n + 1$ se obtiene

$$P_q = (x + y) + \frac{(x + y)^3}{3!} + \dots + \frac{(x + y)^q}{q!}$$

Como las derivadas parciales están acotadas por la unidad,

$$|R_q| = |\sin(x + y) - P_q| \leq \frac{1}{(q + 1)!} (x + y)^{q+1},$$

con lo que $\lim_{q \rightarrow \infty} R_q = 0$, cualesquiera que sean x e y reales, de donde se deduce la identidad planteada.

Nota La situación es más general alcanzando a cualquier función de dos variables de clase C^∞ cuyas derivadas parciales de orden q estén acotadas por M^q , para una constante M .

PROBLEMAS PROPUESTOS:**Ejercicio 4.1**

Desarrollar la función $f(x, y) := xy$ en potencias de $x - 1$ e $y - 1$.

Ejercicio 4.2

Escribir el desarrollo de Taylor de orden 1 de $f(x, y) := \frac{1}{xy}$ en el $(1, -1)$.

Ejercicio 4.3

Idem el de orden 2 para $f(x, y) := \sin x \cdot \sin y$ en el $(0, 0)$

Ejercicio 4.4

Idem el de orden 3 para $f(x, y) := e^{xy} \cdot \sin(x + y)$ en el $(0, 0)$

Ejercicio 4.5

Calcular, aplicando la fórmula de Taylor, los límites:

- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x \cdot \sin y - xy}{x^2 + y^2}$
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{\left(\frac{1}{xy} - x + y + 3\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2}}$
- (iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x \sin(x + y) - x - y - x^2 - xy}{x^2 + y^2}$
- (iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y + y \sin x}{xy}$
- (v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos xy) \log(1 + x + y)}{(x^2 + y^2)^2}$

2 Extremos de funciones.

Sea f una función real definida en un abierto U . Decimos que x_0 es un *máximo relativo estricto* (respectivamente un *mínimo relativo estricto*) de f si existe un $r > 0$ tal que si x está en U y $\|x - x_0\| < r$, entonces $f(x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0) < f(x)$). Cualquiera de ambos casos lo citaremos como un *extremo relativo estricto*.

Si las desigualdades no son estrictas hablaremos de extremos relativos. En el caso de que cualquier desigualdad ocurra en todo U hablaremos de *extremos absolutos*.

Ejemplo 4.6

Consideremos $f(x, y) := e^{-|x-y|^2}$. Como la función real $f(t) := e^{-t}$ es monótona decreciente en los reales no negativos y $e^0 = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$, entonces todo punto de la forma (y^2, y) es un máximo y no hay mínimos.

Ejemplo 4.7

La función $f(x, y) := (x - 1)^2 + (y - 1)^4$ es siempre no negativa y como $f(1, 1) = 0$ observamos que $(1, 1)$ es un mínimo absoluto.

Para evitar la mera inspección a la hora de encontrar extremos usaremos las siguientes condiciones en dos variables:

2.1 Condición necesaria para la existencia de extremos.

Si $f(x, y)$ admite derivadas parciales en un extremo relativo, éstas son cero (a un punto con estas características se le denomina *punto estacionario* o *punto crítico*)

Todo punto estacionario que no sea extremo se denomina *punto de silla*

Ejemplo 4.8

La función $f(x, y) := x^2 - y^2$ tiene en el $(0, 0)$ un punto estacionario que no es máximo pues $f(x, 0) = x^2 > f(0, 0)$ si $x \neq 0$ y no es mínimo pues $f(0, y) = -y^2 < f(0, 0)$ si $y \neq 0$ (La gráfica de la función recuerda una silla de montar a caballo, de ahí el nombre del punto).

2.2 Condición suficiente para la existencia de extremos.

Sea f una función definida en un entorno de (x_0, y_0) , un punto estacionario, de forma que existen las derivadas parciales segundas en un entorno de (x_0, y_0) siendo continuas en el punto. Sean

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad ; \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad H := AC - B^2.$$

- (i) Si $A > 0$ y $H > 0$, (x_0, y_0) es un mínimo relativo estricto de f .
- (ii) Si $A < 0$ y $H > 0$, (x_0, y_0) es un máximo relativo estricto de f .
- (iii) Si $H < 0$, (x_0, y_0) es un punto de silla.

Si $H = 0$ no podemos afirmar nada como nos muestran las funciones $f(x, y) := x^4 + y^4$, $g(x, y) := -x^4 - y^4$, $h(x, y) := x^4 - y^4$ que en el origen tienen respectivamente un mínimo, un máximo y un punto de silla siendo $H = 0$.

Ejemplo 4.9

Consideremos la función $f(x, y) := 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$. Calculemos sus puntos estacionarios resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 8x^3 - 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4y^3 - 4y = 0 \end{aligned}$$

que nos proporciona como soluciones

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 24x^2 - 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 12y^2 - 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

se tiene, aplicando la condición suficiente, que

$$\begin{aligned} (0, 0) &\text{ es un máximo relativo estricto,} \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right) &\text{ son mínimos relativos estrictos y} \\ (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right) &\text{ son puntos de silla.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10

Consideremos la función $f(x, y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$

Calculemos sus puntos estacionarios resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -6xy + 8x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y - 3x^2 = 0 \end{aligned}$$

que nos proporciona como única solución el $(0, 0)$. Con la notación de la condición suficiente se tiene en él $A = 0$, $C = 2$ y $B = 0$, con lo que $H = 0$. A pesar de no obtener información si tomamos cualquier bola centrada en el origen, y salvo en éste, $f(x, y) < 0$ entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$, siendo $f(x, y) > 0$ en el resto de la bola. Se trata, pues, de un punto de silla.

El siguiente ejemplo nos muestra el llamado *Método de las regiones* para cuando se tiene $H = 0$

Ejemplo 4.11

Consideremos la función $f(x, y) := xy^2(3 - x - y)$

La función al ser de clase C^∞ permite que le sean aplicados todos los resultados anteriores. Calculemos en primer lugar sus puntos críticos resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(3 - y - 2x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy(6 - 3y - 2x) = 0$$

cuyas soluciones son $(0, 3)$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ y todos los puntos de la forma $(x, 0)$. Analicemos cada caso:

En el punto $(0, 3)$ se obtiene $A = -18$, $B = -9$, $C = 0$ y $H = -81$, luego se trata de un punto de silla.

En el punto $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ se obtiene $A = -\frac{9}{2}$, $B = -\frac{9}{4}$, $C = -\frac{27}{8}$ y $H = \frac{81}{4}$, luego se trata de un máximo local estricto.

En los puntos $(x, 0)$ vemos que $A = B = 0$ luego $H = 0$. Nuestro método de cálculo diferencial no nos aporta información luego vamos a estudiar el comportamiento de la función en un entorno de esos puntos. Como $f(x, 0) = 0$ tendremos que estudiar el signo de f (si no fuese así bastaría sumar una constante a la función, no alterándose la derivadas, para conseguir el valor cero).

La función, al estar factorizada, sabemos que se anula en los ejes ($x = 0$, $y = 0$) y en la recta $x + y = 3$. Las tres rectas dividen al plano (dominio de la función) en siete regiones (compruébese con un dibujo). Analizando el signo de los factores o eligiendo un punto al azar en el interior de cada una de ellas sabemos el signo de la función.

Si tomamos un $(x, 0)$ con $x < 0$ observamos que se puede dibujar una bola centrada en él en donde la función toma un valor negativo (fuera del eje X) o cero (en el eje). Así pues se trata de un máximo local (no estricto).

Si tomamos un $(x, 0)$ con $x > 3$ el razonamiento es idéntico.

Si tomamos un $(x, 0)$ con $0 < x < 3$ el razonamiento es análogo cambiando negativo por positivo, luego se trata de un mínimo local no estricto.

Finalmente en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 0)$ cualquier bola centrada en ellos contiene puntos donde la función es positiva y puntos donde la función es negativa. Se trata de un punto de silla. Conviene notar que este razonamiento valdría para el punto $(0, 3)$ que ya habíamos visto que es de silla.

2.3 Condiciones para la existencia de extremos absolutos.

Recordemos los siguientes resultados:

- (1) Toda función real y continua sobre un compacto alcanza su máximo y su mínimo absolutos.
- (2) Toda función real, continua, no negativa y con límite cero en el infinito tiene máximo absoluto.

Ejemplo 4.12

Consideremos $f(x, y) := (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ con $a > 0$, $b > 0$.

Al ser no negativa y $f(0, 0) = 0$ resulta ser el origen el mínimo absoluto. Por la condición (2) anterior admite máximo absoluto. Distingamos su cálculo según los valores de a y b .

Si $a = b$, al considerar la función $g(t) = ate^{-t}$ para $t \geq 0$, con lo que $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ calculamos $g'(t) = a(1 - t)e^{-t}$ con lo que en $t = 1$ la función pasa de creciente a decreciente y presenta un máximo relativo. Al ser $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ y $g(0) = 0$ se tiene que f tiene como máximos absolutos los puntos $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Si $a \neq b$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(a - (ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} = g_1(x, y)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(b - (ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} = g_2(x, y)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

que nos da como puntos estacionarios

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (-2xg_1(x, y) + (2a - 6ax^2 - 2by^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (-2yg_2(x, y) + (2b - 6by^2 - 2ax^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (-2yg_1(x, y) - 4bxy)e^{-(x^2+y^2)}$$

se tiene que $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

Si $a > b$ $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son puntos de silla y $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son máximos relativos.

Si $a < b$ $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son puntos de silla y $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son máximos relativos.

En virtud del resultado (2) los extremos son absolutos.

Ejemplo 4.13

Determinemos los extremos absolutos de $f(x, y) := xy(1 - x^2 - y^2)$ en $[0, 1] \times [0, 1]$

Éstos existen por el resultado (1). Resolviendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 3x^2 - y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$$

obtenemos el punto $(1/2, 1/2)$. Al ser $A = C = -3/2$ y $B = -1/2$ (luego $H = 2$) resulta ser un máximo relativo.

En la frontera se tiene $f(0, y) = 0$, $f(x, 0) = 0$, $f(1, y) = -y^3$, $f(x, 1) = -x^3$. Conjugando con lo anterior se obtiene que $(1, 1)$ es el mínimo absoluto.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 4.6

Calcular los extremos relativos (y absolutos cuando existan) de las funciones:

(1) $f(x, y) := xy(1 - x - y)$

(2) $f(x, y) := xye^{x+2y}$

(3) $f(x, y) := (x - y^2)(x - y^3)$

(4) $f(x, y) := y^2 + x^2y + x^4$

(5) $f(x, y) := x^2 + y^2 + x + y + xy$

(6) $f(x, y) := (x - 1)^2 + (x - y)^4$

(7) $f(x, y) := y^2 - x^3$

(8) $f(x, y) := \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1 + t^4} dt$

(9) $f(x, y) := \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

(10) $f(x, y) := \frac{x + y^2}{2 + x^2 + y^4}$

(11) $f(x, y, z) := (x + z^2)e^{x(y^2 + z^2 + 1)}$

(12) $f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$

Práctica 5

El teorema de la función implícita.

Estudiaremos en esta práctica los teoremas de la función inversa y de la función implícita haciendo hincapié, como hemos hecho en prácticas anteriores, en dimensiones dos y tres.

1 Teorema de la función inversa en \mathbf{R}^2 .

Sean $F : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0) \in U$ tal que $J_F(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe V entorno abierto de (x_0, y_0) contenido en U con las siguientes propiedades:

- (i) $W := F(V)$ es un conjunto abierto en \mathbf{R}^2
- (ii) $F : V \rightarrow W$ es un homeomorfismo,
- (iii) $F^{-1} : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una función de clase C^1

Si F es de clase C^k en U entonces también F^{-1} es de clase C^k en W .

Ejemplo 5.1

Dada la función $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$, se pide:

- (a) Probar que F es localmente invertible, con inversa de clase C^∞ , en un entorno de cada punto (x_0, y_0) , $x_0 \neq 0$.
- (b) ¿Es F invertible con inversa diferenciable en un entorno de un punto $(0, y_0)$?

Solución:

(a) Es claro que F es una función de clase C^∞ en \mathbf{R}^2 . Además el jacobiano de F en un punto (x_0, y_0) viene dado por $J_F(x_0, y_0) = -2x_0 \neq 0$. Podemos aplicar el teorema de la función inversa para concluir que existe V entorno abierto de (x_0, y_0) con las propiedades (i), (ii), (iii) anteriores.

(b) Supongamos V entorno abierto de $(0, y_0)$ tal que $W := F(V)$ es abierto y $F : V \rightarrow W$ es un homeomorfismo con inversa diferenciable G . Entonces, por la regla de la cadena, $dF(0, y_0) \circ dG(0, y_0) = \text{id}_{\mathbf{R}^2}$ y en consecuencia $J_F(0, y_0) \cdot J_G(0, y_0) = 1$, lo que contradice $J_F(0, y_0) = 0$. Por tanto F no es invertible en ningún entorno de $(0, y_0)$.

Ejercicio 5.1

Dada la función $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (\sin x, -y + x \sin x)$ se pide:

- (a) Averiguar si F es invertible.
- (b) Averiguar en qué puntos es F localmente invertible, con inversa diferenciable.

2 Teorema de la función implícita (casos particulares).

2.1

Sean $F : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0) \in U$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existen $\delta > 0$ y una única función $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 que cumple $\phi(x_0) = y_0$, $F(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Si F es de clase C^k en U entonces ϕ es de clase C^k en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

2.2

Cuando $F : U \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0, z_0) \in U$ cumple $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces existen V entorno abierto de (x_0, y_0) en \mathbf{R}^2 y una única función $\phi : V \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 que cumplen $\phi(x_0, y_0) = z_0$, $(x, y, \phi(x, y)) \in U$ y $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$. Si F es de clase C^k en U entonces ϕ es de clase C^k en V .

Ejemplo 5.2

(a) Prueba que la ecuación $xy = \log(\frac{x}{y})$ admite una única solución $y = \phi(x)$ de clase C^∞ definida en un entorno de $x_0 = \sqrt{e}$ y verificando $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(b) Deduce que la función ϕ presenta un máximo local en x_0 .

Solución:

(a) Sean $U :=]0, \infty[\times]0, \infty[$ y $F : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la función dada por $F(x, y) = xy - \log(\frac{x}{y})$. Puesto que F es de clase C^∞ en U y el punto $(x_0, y_0) = (\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ cumple $F(x_0, y_0) = 0$ y $D_2F(x_0, y_0) = 2\sqrt{e} \neq 0$ podemos aplicar el teorema de la función implícita (I) para concluir que existen $\delta > 0$ y una única función $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞ que verifica $\phi(x_0) = y_0$, $F(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Esta última igualdad quiere decir que, para cada $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $(x, \phi(x)) \in U$ y además $y = \phi(x)$ es solución de la ecuación $xy = \log(\frac{x}{y})$.

(b) Comprobaremos que x_0 es un punto crítico de ϕ y que $\phi''(x_0) < 0$.

Puesto que

$$x\phi(x) = \log x - \log(\phi(x))$$

para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, derivando respecto de la variable x obtenemos

$$(*) \quad \phi(x) + x\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$$

para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Sustituyendo $x = x_0$ y teniendo en cuenta que $\phi(x_0) = y_0 = x_0^{-1}$ se tiene

$$y_0 + x_0\phi'(x_0) = y_0 - \phi'(x_0)x_0,$$

de donde $\phi'(x_0) = 0$.

Si ahora derivamos en $(*)$ obtendremos

$$2\phi'(x) + x\phi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\phi(x)\phi''(x) - (\phi'(x))^2}{(\phi(x))^2}$$

y al sustituir $x = x_0$, queda $x_0\phi''(x_0) = -y_0^2 - x_0\phi''(x_0)$, de donde $\phi''(x_0) < 0$.

Ejemplo 5.3

Siendo $F(x, y, z) = z^3 \log(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$, prueba que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase C^∞ , $z = \varphi_i(x, y)$ ($i=1,2$), en un cierto entorno de $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Compara los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en un entorno del punto (x_0, y_0) .

Solución:

(a) Resolviendo la ecuación $F(1, 1, z) = 0$ obtenemos dos soluciones para z : $z_1 = -3$, $z_2 = -4$.

Puesto que F es una función de clase C^∞ en $U :=]0, \infty[\times]0, \infty[\times \mathbf{R}$, entorno abierto de (x_0, y_0, z_1) y de (x_0, y_0, z_2) , y se cumple $F(x_0, y_0, z_i) = 0$, $D_3F(x_0, y_0, z_i) = 2z_i + 7 \neq 0$ ($i=1,2$), concluimos que existen un entorno abierto V de (x_0, y_0) y dos funciones de clase C^∞ en V , $\varphi_i : V \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ($i=1,2$), tales que $\varphi_i(x_0, y_0) = z_i$ y $F(x, y, \varphi_i(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$.

(b) Para calcular el desarrollo de Taylor de φ_1 en un entorno de (x_0, y_0) observamos que $F(x, y, \varphi_1(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$. Derivando respecto de x se obtiene

$$3(\varphi_1(x, y))^2 D_1\varphi_1(x, y) \log(xy) + x^{-1}(\varphi_1(x, y))^3 + 4x + 2\varphi_1(x, y) D_1\varphi_1(x, y) + 8\varphi_1(x, y) + 8x D_1\varphi_1(x, y) - D_1\varphi_1(x, y) = 0$$

y sustituyendo $x = y = 1$ queda

$$z_1^3 + 4 + 2z_1 D_1\varphi_1(1, 1) + 8z_1 + 7D_1\varphi_1(1, 1) = 0$$

de donde $D_1\varphi_1(1,1) = 47$.

Si derivamos la ecuación $F(x, y, \varphi_1(x, y)) = 0$ respecto de la segunda variable y después sustituimos $x = y = 1$ obtendremos

$$z_1^3 + 4 + 2z_1 D_2\varphi_1(1,1) + 7D_2\varphi_1(1,1) = 0$$

y por tanto

$$D_2\varphi_1(1,1) = 23.$$

El polinomio de Taylor de primer orden de φ_1 alrededor de $(1,1)$ queda:

$$P(x, y) = -3 + 47(x-1) + 23(y-1)$$

(c) Procediendo como en (b) obtendremos

$$z_2^3 + 4 + 2z_2 D_1\varphi_2(1,1) + 8z_2 + 7D_1\varphi_2(1,1) = 0$$

$$z_2^3 + 4 + 2z_2 D_2\varphi_2(1,1) + 7D_2\varphi_2(1,1) = 0$$

y por tanto

$$D_1\varphi_2(1,1) = -92, \quad D_2\varphi_2(1,1) = -60.$$

El polinomio de Taylor de primer orden de φ_2 alrededor de $(1,1)$ será:

$$Q(x, y) = -4 - 92(x-1) - 60(y-1)$$

Ejercicio 5.2

Prueba que existe una única función $g : U \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 en algún entorno abierto U de $(0,0)$ en \mathbf{R}^2 , que se anule en $(0,0)$ y que cumpla:

$$e^{g(x,y)} = (1 + xe^{g(x,y)})(1 + ye^{g(x,y)}) \quad \forall (x,y) \in U.$$

Ejemplo 5.4

(a) Comprobar que el sistema

$$xy^5 + yu^5 + v^5 = 1$$

$$x^5y + y^5u + v = 1$$

define dos funciones $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ de clase C^∞ en un entorno U de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tales que $f(0, 1) = 1$, $g(0, 1) = 0$.

(b) Si se denota $G(x, y) := (f(x, y), g(x, y))$, probar que G es invertible en un entorno de $(0, 1)$ y calcular la diferencial de la inversa en el punto $(1, 0)$.

Solución:

(a) Sea $F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la función de clase C^∞ cuyas funciones coordenadas son

$$F_1(x, y, u, v) := xy^5 + yu^5 + v^5 - 1, \quad F_2(x, y, u, v) := x^5y + y^5v + v - 1.$$

Puesto que $F(0, 1, 1, 0) = (0, 0)$ y el determinante

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}$$

no se anula en el punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 0)$, el teorema de la función implícita nos asegura que existe un entorno U de (x_0, y_0) y existen dos únicas funciones $f, g : U \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞ tales que $f(x_0, y_0) = u_0$, $g(x_0, y_0) = v_0$ y se cumple que $F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in U$.

(b) Tenemos que calcular la matriz jacobiana de G en el punto $(0, 1)$.

Sustituyendo $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ en el sistema de ecuaciones original y derivando respecto de la variable x obtendremos el sistema:

$$y^5 + 5y(f(x, y))^4 D_1 f(x, y) + 5(g(x, y))^4 D_1 g(x, y) = 0$$

$$5x^4 y + y^5 D_1 f(x, y) + D_1 g(x, y) = 0$$

de donde, sustituyendo $x = 0$, $y = 1$, y teniendo en cuenta que $f(0, 1) = 1$, $g(0, 1) = 0$, se deduce $D_1 f(0, 1) = -1/5$, $D_1 g(0, 1) = 1/5$.

Mediante el mismo procedimiento pero derivando respecto de y se concluye que $D_2 f(0, 1) = -1/5$, $D_2 g(0, 1) = -5 + 1/5$.

Resulta que el jacobiano de G en $(0, 1)$ es distinto de cero y podemos aplicar el teorema de la función inversa. Por tanto existe un entorno abierto V de $(0, 1)$ tal que $W := G(V)$ es abierto, $G : V \rightarrow W$ es un homeomorfismo y la aplicación inversa $G^{-1} : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ es de clase C^∞ .

Se sigue de la regla de la cadena que la matriz jacobiana de G^{-1} en el punto $(1, 0) = G(0, 1)$ es la inversa de la matriz jacobiana de G en $(0, 1)$, cuyas componentes ya hemos calculado antes.

Ejercicio 5.3

Probar que el sistema :

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2$$

define implícitamente una función $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $f : G \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $0 \in G$, G abierto de \mathbf{R} , en un entorno del punto $(0, 0, \pi)$. Calcular $f'(0)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio 5.4

Comprueba que $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (x \cos y, \sin(x - y))$ tiene inversa local en un entorno del punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y calcula la matriz jacobiana de dicha inversa local en el punto $(0, 0)$. Si denotamos por $G(u, v) := (f(u, v), g(u, v))$ la inversa local anterior, ¿cuánto vale $D_1 f(0, 0)$?

Ejercicio 5.5

Prueba que la ecuación $\log(x^2 + y^2) - 2 \arctan(\frac{y}{x}) = 0$ define una función $y = g(x)$ de clase C^∞ en un entorno de $x_0 = 1$ tal que $g(1) = 0$ y calcula $g'(1)$.

Ejercicio 5.6

Prueba que la ecuación $\sin(yz) + \sin(xz) + \sin(xy) = 0$ admite una única solución $z = \phi(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ que cumple $\phi(\pi, 0) = 1$. Calcula el polinomio de Taylor de primer grado de ϕ alrededor de $(\pi, 0)$.

Ejercicio 5.7

(a) Determinar los valores de a para los cuales el sistema :

$$xz^3 + yu + xa = 1$$

$$2xy^3 + u^2 z + (y - 1)a = 0$$

define a (x, y) como función implícita de (z, u) en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

(b) Si (a) es cierto y se denota $(x, y) = (f(z, u), g(z, u)) := G(z, u)$, calcular la diferencial de G en $(0, 1)$ y estudiar los valores de a para los cuales G admite inversa local C^1 en un entorno de $(0, 1)$.

Ejercicio 5.8

Dada una función $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 , encontrar condiciones que garanticen que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ defina tres funciones de clase C^1

$$x = f(y, z), \quad y = g(x, z), \quad z = h(x, y)$$

en un entorno de (x_0, y_0, z_0) . Comprueba la identidad

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$