Control 1 MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre Verano 2005

Prof: Marcelo Leseigneur
Auxs: Rodrigo Assar, Sebastián Court

Pregunta 1.-

1. Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios reales. Se consideran las aplicaciones:

   $N_\infty : E \to \mathbb{R}_+$ definida por $N_\infty(P) = \sup\limits_{0\leq i\leq q} |a_i|$, donde $P = \sum\limits_{i=0}^{q} a_i X^i$.

   Y, $\phi : E \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(P) = P(1)$.

   Se pide:

   (a) Mostrar que N_∞ es una norma sobre E.

   (b) Mostrar que ϕ es lineal.

   (c) Se considera la familia de polinomios
   $P_n(x) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Calcular $N_\infty(P_n)$ y $\phi(P_n)$.

   (d) Deducir que ϕ no es continua si se considera en E la norma N_∞.

   (e) Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo. Se considera el subespacio vectorial $F = \mathbb{R}_p[X]$ de E de los polinomios de grado menor o igual que p. Se dota F de la norma N_∞ y se considera $\phi|_F$ la restricción de ϕ a F:
   $\phi|_F : F \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(P) = P(1)$. Muestre que $\phi|_F$ es continua.

Pregunta 2.- Sea E un conjunto no vacío. Una función $d : E^2 \to \mathbb{R}$ se dice ultramétrica ssi:

1. $\forall x, y \in E : d(x,y) \geq 0 \quad$ y $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in E : d(x,y) = d(y,x)$.
3. $\forall x, y, z \in E : d(x,z) \leq \max\{d(x,y); d(y,z)\}$

(a) Pruebe que una ultramétrica es una métrica. Además muestre que la métrica discreta es una ultramétrica.

A continuación considere E dotado de una ultramétrica d.

(b) Pruebe que $\forall x, y, z \in E : d(x,y) > d(y,z) \Rightarrow d(x,y) = d(x,z)$. Deduzca que "todo triángulo en E es isósceles".

(c) Pruebe que para cualquier $y \in E$ fijo y $r > 0$ también fijo, se tiene que $S = \{x \in E : d(x,y) = r\}$ es abierto. Deduzca que en el caso $E = \mathbb{R}^n$ una ultramétrica no puede ser equivalente a la métrica euclideana.

Pregunta 3.-

(a) Analizar la continuidad de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

(i)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(ii)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^x-e^y}{x-y} & x\neq y\\ e^x & x=y, \end{cases}$$

(b) (i) Pruebe que los conjuntos $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<|y|\}$ y $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<|x|\}$ son abiertos de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Estudie continuidad y continuidad uniforme de la siguiente función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2 & |x|\leq |y|\\ y^2 & |y|<|x|, \end{cases}$$

Suerte y Feliz Navidad

Tiempo: 3 hrs.