

P1) a) Sea (E, d) un espacio métrico.
Se define la métrica $p(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$
 $\forall x, y \in E$.

(i) Dibuje $B_p(\vec{0}, r)$ para $r \in [0, 1]$
y para $r > 1$. Donde $E = \mathbb{R}^2$ y $d = \|\cdot\|_2$
(mét. inducida por la norma 2)

(ii) Muestre que en general existe una constante
 $C > 0 \in \mathbb{R}$ de modo que $p(x, y) \leq C d(x, y)$
 $\forall x, y \in E$. Pero no existe una constante
 $K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in E$ $d(x, y) \leq K p(x, y)$.
A pesar de ello, prueba que:
 $x_m \xrightarrow{d} x \iff x_m \xrightarrow{p} x$.

(b) Considere la familia numerable de espacios
métricos: $\{(E_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como antes,
considere $p_n(x, y) = \min\{1, d_n(x, y)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para $\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \equiv \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in E_n\}$
considere la función d def. de $(\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n) \times (\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n)$
a \mathbb{R} tal que $d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} p_n(x_n, y_n)$
• Pruebe que dicha función está bien definida
• Pruebe también que define una métrica sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

(c) Demuestre que sea $E \neq \emptyset$ un conjunto. Una función
 $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ultramétrica si:
u1) $\forall x, y \in E$ $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$
u2) $\forall x, y \in E$ $d(x, y) = d(y, x)$.
u3) $\forall x, y, z \in E$ $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Considere la clasificación hecha a través de un dendograma.
Esto es, considere E un conjunto finito y un árbol T
en el cual se van separando los elementos de E
de modo que: