

Capítulo 1

Funciones de varias variables: Límites.

1.1 Funciones de varias variables.

1.1.1 Definiciones:

Función de una variable. Una función de una variable es una correspondencia entre dos magnitudes. Por ejemplo, el espacio y el tiempo.

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \quad x \longmapsto y \quad y = f(x)$$

La gráfica de una función de una variable es una curva en el plano.

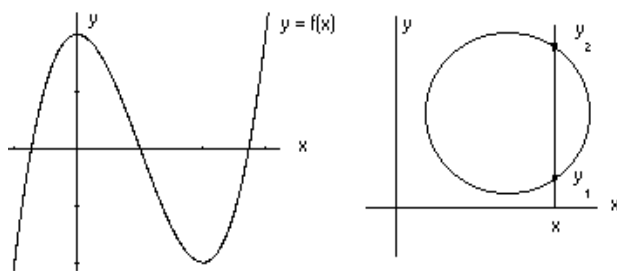


Figura 1.1: Gráfica de una función de una variable. La circunferencia no es función.

Para que una curva represente una función no puede tener dos puntos en la misma vertical. Es decir, para que una correspondencia entre dos magnitudes sea función, la imagen tiene que ser única. Para poder aplicar las propiedades de las funciones a las correspondencias que no lo son hay que descomponerlas en funciones. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es una función,

porque para cada valor de una de las variables hay dos valores de la otra. En efecto, tenemos: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = +\sqrt{1 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

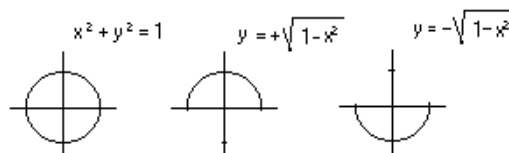


Figura 1.2: La circunferencia no es una función, pero podemos descomponerla en dos funciones.

Función de varias variables. Una función de varias variables es una correspondencia entre más de dos magnitudes.

Ejemplo: Si expresamos el área de un triángulo en función de la base y de la altura, tendremos una función de dos variables.

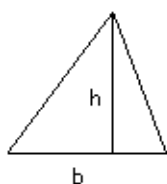


Figura 1.3:

$$a = \frac{1}{2}bh \Rightarrow a = f(b, h) \quad b > 0, \quad h > 0$$

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : (x, y) \longmapsto z \quad z = f(x, y)$$

Ejemplo: Si expresamos el volumen de un paralelepípedo rectangular (caja de zapatos) en función de sus aristas, tendremos una función de tres variables.

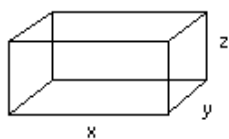


Figura 1.4:

$$v = xyz \Rightarrow v = f(x, y, z) \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : (x, y, z) \longmapsto v \quad v = f(x, y, z)$$

A la magnitud que se despeja se le llama variable dependiente y a las otras variables independientes.

A las funciones de varias variables también se les llama *campos escalares*.

Igual que en una variable, para que la correspondencia sea función la imagen tiene que ser única. Para poder aplicar las propiedades de las funciones a las correspondencias que no lo son, hay que descomponerlas en funciones.

Ejemplo: La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no es una función, ya que si le damos valores a dos de las variables obtenemos dos valores de la tercera.

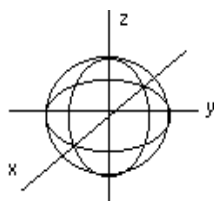


Figura 1.5:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 = 1 &\Rightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (\text{no es función}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} y_1 = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} & (\text{si es función}) \\ y_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} & (\text{si es función}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Funciones vectoriales (Campos Vectoriales). Una función se dice que es vectorial cuando el resultado no es un número, sino un vector, es decir, una pareja de números o una terna de números.

Ejemplo: Si las ecuaciones paramétricas de una curva son las siguientes:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

para cada valor del parámetro tiempo obtenemos las tres coordenadas del punto de situación.

$$\begin{aligned}
 f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 f : t &\longmapsto (x, y, z) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

También se pueden definir funciones vectoriales que dependan de varias variables. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 f : (x, y) &\longmapsto (xy, x^2y, \ln x)
 \end{aligned}$$

En general:

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \begin{cases} \begin{matrix} n = m = 1 & \text{función de una variable} \\ n > 1 \\ m = 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \text{ cualquiera} \\ m > 1 \end{matrix} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{campo escalar} \\ \text{campo vectorial} \end{matrix}$$

1.1.2 Dominio de una función de varias variables.

El dominio de una función se define como el conjunto de puntos que tienen imagen.

En la práctica el dominio de una función de varias variables viene determinado por el contexto del problema. En general se entiende que el dominio

viene determinado por todos aquellos valores para los cuales tiene sentido aplicar la fórmula que define la función. (Si el dominio es más pequeño hay que indicarlo). Por ejemplo, si definimos la función $a = \frac{1}{2}xy$ el dominio sería cualquier pareja de números reales (x,y) . Ahora bien, si queremos que esa función represente el área de un triángulo, los valores x e y tienen que ser positivos. Por lo tanto dicha restricción habrá que indicarla junto con la fórmula $a = \frac{1}{2}xy \quad x > 0, y > 0$. Si no se indica ninguna restricción estamos suponiendo que el dominio es el máximo "permitido" por la fórmula.

El dominio de una función de dos variables $f(x, y)$ será una región del plano, y el dominio de una función de tres variables $f(x, y, z)$ una región del espacio.

Se llama *Recorrido* de una función al conjunto de elementos que son imagen. En general, nos ocuparemos del Dominio y sólo en casos particulares nos ocuparemos del Recorrido. El conocimiento del dominio nos permite saber qué valores pueden sustituirse en la fórmula y cuales no.

Ejemplo 1.1 *Encontrar el dominio de definición de las siguientes funciones, indicando su significado gráfico.*

$$1. \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$2. \quad f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$$

$$3. \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$$

$$x - y^2 > 0 \Rightarrow x > y^2 \Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y^2\}$$

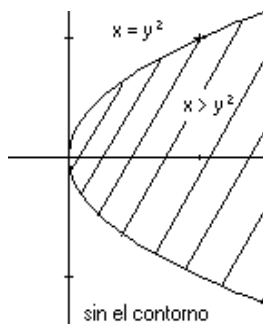


Figura 1.6: Dominio de la función: $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$

$$4. f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$$

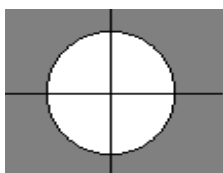


Figura 1.7:

$$x^2 + y^2 - 9 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9 \Rightarrow$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 9\}$$

Exterior del círculo de centro el Origen y radio 3, excluido el contorno

$$5. f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

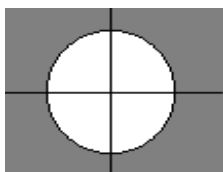


Figura 1.8:

$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 9$$

$$x \neq 0 \Rightarrow$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 9, x \neq 0\}$$

Exterior del círculo de centro el Origen y radio 3, incluido el contorno y excluido el eje OY.

$$6. f(x, y, z) = \frac{\sin yz}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

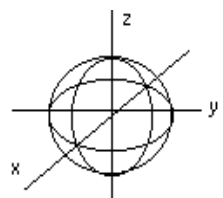


Figura 1.9:

$$4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 4 \Rightarrow$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

El dominio es el interior de la esfera de centro el Origen y radio 2, excluido el contorno.

$$7. f(x, y) = \ln xy$$

$$xy > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / [x > 0, y > 0] \text{ ó } [x < 0, y < 0]\}$$

Es decir, el dominio está formado por el primer y el tercer cuadrante, excluidos los ejes de coordenadas.

$$8. f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$$

El dominio comprende todo el plano menos los dos ejes de coordenadas

9. $f(x, y) = \arcsen(x + y)$

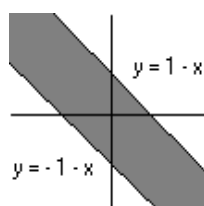


Figura 1.10:

$$-1 \leq x+y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1-x \\ -1 \leq x+y \Rightarrow y \geq -1-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x+y \leq 1\}$$

El dominio es la franja comprendida entre las rectas $y = 1 - x$ e $y = -1 - x$, incluidas ambas rectas.

1.1.3 Operaciones con funciones de varias variables.

Las funciones de varias variables se pueden combinar de la misma forma que las funciones de una sólo variable. Por tanto se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

$$f(x, y) \pm g(x, y) \quad , \quad f(x, y) \cdot g(x, y) \quad , \quad \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad , \quad \dots$$

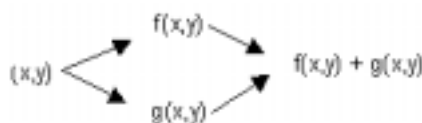


Figura 1.11: Se opera con las imágenes de un mismo punto.

Operar con funciones significa operar con las imágenes de un mismo punto, por tanto, para operar, todas las funciones tienen que ser del mismo número de variables (aunque en la fórmula no tienen por que aparecer todas).

Ejemplo, se pueden sumar las funciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = x \\ g(x, y) = x + y \end{array} \right\} f(x, y) + g(x, y) = 2x + y$$

sin embargo, no se pueden sumar las funciones

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x, y) = x + y \end{array} \right\}$$

Composición de funciones.

Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda al resultado de la primera. Para poder componer dos funciones el conjunto final de la primera función tiene que coincidir con el conjunto inicial de la segunda.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$g \circ f(x, y) = g[f(x, y)] = h(x, y)$$

La composición de funciones no es conmutativa. Es más, puede estar definida la composición en un orden $g \circ f$, y no estarlo en el orden contrario.

Ejemplo 1.2 Componer las funciones, en el orden en que pueda hacerse:

$$1. f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2 \text{ y } g(z) = \sqrt{z}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2 \\ g(z) = \sqrt{z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array} \left\} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$g[f(x, y)] = h(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

$$2. f(x, y, z) = (2x, x + y, x + z), g(x, y, z) = (x + y, y + z) \text{ y } h(x, y) = x + y$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = (2x, x + y, x + z) \\ g(x, y, z) = (x + y, y + z) \\ h(x, y) = x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \end{array} \left\} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$$h[g[f(x, y)]] = h[g(2x, x + y, x + z)] = h(3x + y, 2x + y + z) = 5x + 2y + z$$

La función g debe interpretarse como: (1^a componente $+2^a$, $2^a + 3^a$)

1.1.4 Gráfica de una función de dos variables.

La gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio (x, y, z) para los cuales $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in D_f$.

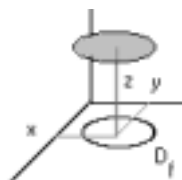


Figura 1.12:

La gráfica de una función de dos variables será una superficie en el espacio. La proyección de la gráfica sobre el plano horizontal coincide con el dominio de la función.

Los puntos de la gráfica se representan por

$$(x, y, f(x, y))$$

Ejemplo 1.3 Representa la función: $f(x, y) = 2x + y - 4$

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 . Para representar la función ponemos z en lugar de $f(x, y)$, para ver si se trata de una ecuación conocida, con lo que tenemos: $z = 2x + y - 4$ de donde $2x + y - z = 4$ que es la ecuación de un plano en el espacio.

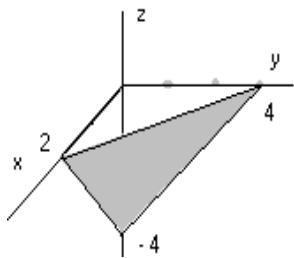


Figura 1.13:

Ejemplo 1.4 Representa la función: $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Solución:

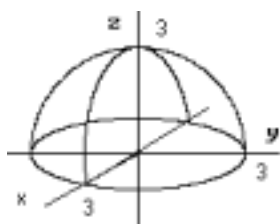


Figura 1.14:

El dominio de la función viene determinado por $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ de donde $x^2 + y^2 \leq 9$ que es el círculo con centro el origen de coordenadas y radio 3 (incluido su contorno).

Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que resulta: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ de donde $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ o bien $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que es la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 3. Y al limitarnos a valores de z positivos, se reduce a la semiesfera superior.

Ejemplo 1.5 Representa la función: $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Solución:

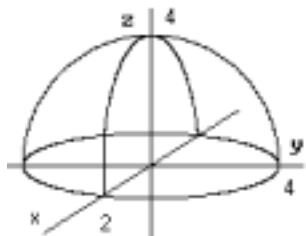


Figura 1.15:

El dominio de la función vendrá determinado por $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$ de donde $4x^2 + y^2 \leq 16$, o lo que es lo mismo, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ que es la elipse con centro el origen de coordenadas y semiejes 2 y 4 respectivamente (incluido su contorno).

Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que resulta: $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ de donde $z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$ con lo cual $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$ o bien, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$ que es la ecuación del elipsoide de centro el origen de coordenadas y semiejes 2, 4 y 4 respectivamente. Y al limitarnos a valores de z positivos, se reduce al semielipsoide superior.

Ejemplo 1.6 Representa la función: $f(x, y) = 3$

Solución:

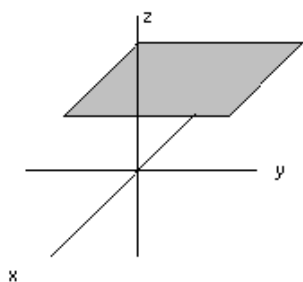


Figura 1.16:

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 .

Para representar la función ponemos z en lugar de $f(x, y)$, con lo que tenemos: $z = 3$ que es la ecuación del plano horizontal de altura 3.

Cortes con los planos coordenados. Para ayudarnos en la representación gráfica de las superficies, estudiaremos la curva en que la superficie corta a los planos coordenados.

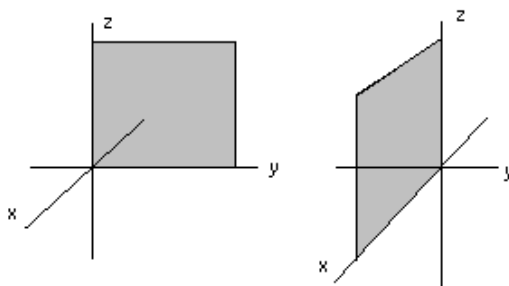


Figura 1.17: Planos coordenados.

Ejemplo 1.7 Representa la función: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solución:

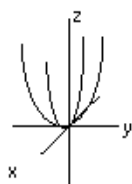


Figura 1.18:

El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 .

Para representar la función ponemos z en lugar de $f(x, y)$, con lo que tenemos: $z = x^2 + y^2$ que, en principio, no sabemos de qué superficie se trata. Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

corte con el plano $x = 0$ $z = y^2$ que es una parábola

corte con el plano $y = 0$ $z = x^2$ que es otra parábola.

Si supieramos los cortes que se producen en la gráfica mediante planos horizontales la tendríamos perfectamente determinada.

Estos cortes son las curvas de nivel.

Curvas de nivel. La intersección del plano horizontal, de altura k , $z = k$ con la superficie $z = f(x, y)$ se llama curva de contorno de altura k .

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = z \\ z = k \end{array} \right\} \text{ curva de contorno de altura } k$$

La proyección de esta curva de contorno sobre el plano horizontal de coordenadas, se llama *curva de nivel de altura k de la función f*

$$f(x, y) = k \quad \text{curva de nivel } k$$

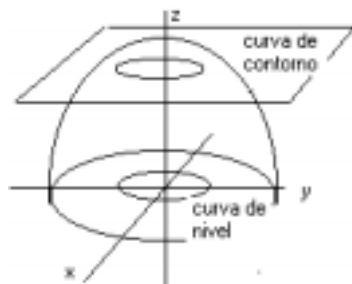


Figura 1.19: Curva de contorno y curva de nivel.

Las *curvas de nivel* son el conjunto de puntos del dominio donde la función es constante, es decir, las curvas de altura constante sobre la gráfica de la función. Las curvas de nivel permiten representar superficies tridimensionales mediante un mapa plano. Es importante elegir los valores de z adecuadamente para que el mapa traslade una clara visualización de la superficie. Mucho espacio entre dos curvas de nivel significa que la superficie crece lentamente. Dos curvas de nivel muy próximas significa que la superficie crece rápidamente.

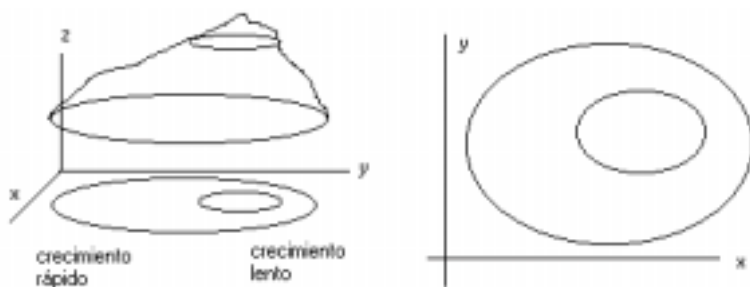


Figura 1.20: La distancia entre las curvas de nivel muestra el crecimiento de la superficie

Ejemplo: Representa la función: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 .

Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que tenemos: $z = x^2 + y^2$.

Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

corte con el plano $x = 0$ $z = y^2$ que es una parábola

corte con el plano $y = 0$ $z = x^2$ que es otra parábola.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante

$x^2 + y^2 = z$ para cada valor de z tenemos una circunferencia de radio \sqrt{z} . Podemos dar varios valores a z para ir viendo las curvas de contorno a distintas alturas:

nivel $z = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ se reduce al punto $(0, 0)$

nivel $z = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ circunferencia de radio 1

nivel $z = 4 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 2

nivel $z = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ circunferencia de radio 3

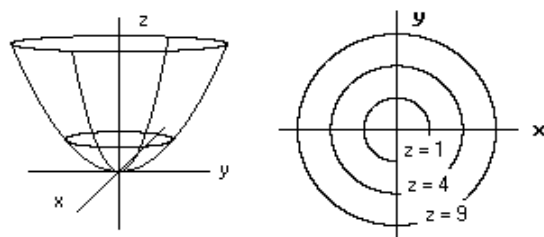


Figura 1.21: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$

Ejemplo 1.8 Representa la función: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 .

Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que tenemos:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

corte con el plano $x = 0$ $z = \sqrt{y^2} = |y|$ que es una recta quebrada

corte con el plano $y = 0$ $z = \sqrt{x^2} = |x|$ que es otra recta quebrada.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante

$x^2 + y^2 = z^2$ para cada valor de z tenemos una circunferencia de radio z

Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

nivel $z = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ se reduce al punto $(0, 0)$

nivel $z = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ circunferencia de radio 1

nivel $z = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 2

nivel $z = 3 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ circunferencia de radio 3

Las curvas de nivel son circunferencias como en el caso anterior, pero los cortes con los planos coordenados son rectas y no parábolas. La gráfica resultante es un cono.

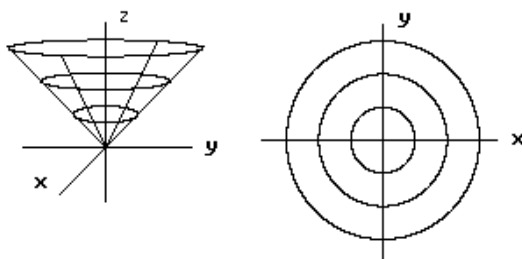


Figura 1.22: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplo 1.9 Representa la función: $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 . Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que tenemos: $z = 25 - x^2 - y^2$.

corte con el plano $x = 0$ $z = 25 - y^2$ que es una parábola hacia abajo

corte con el plano $y = 0$ $z = 25 - x^2$ que es otra parábola hacia abajo.

Para hallar las curvas de nivel suponemos z constante $x^2 + y^2 = 25 - z$ para cada valor de $z < 25$ tenemos una circunferencia de radio $\sqrt{25 - z}$

Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

nivel $z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 25 \rightarrow$ circunferencia de radio 5

nivel $z = 9 \rightarrow x^2 + y^2 = 16 \rightarrow$ circunferencia de radio 4

nivel $z = 16 \rightarrow x^2 + y^2 = 9 \rightarrow$ circunferencia de radio 3

nivel $z = 21 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow$ circunferencia de radio 2

nivel $z = 24 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ circunferencia de radio 1

nivel $z = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ se reduce al punto $(0, 0)$

La gráfica sería un paraboloides invertido.

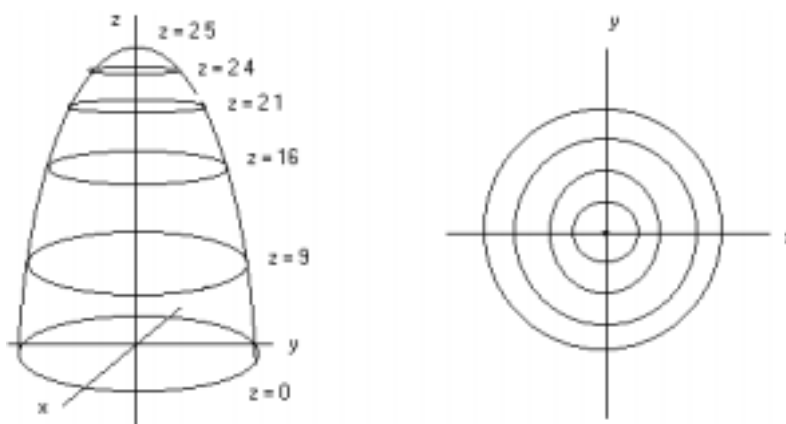


Figura 1.23: Gráfica y curvas de nivel de la función: $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

Ejemplo 1.10 Representa la función: $f(x, y) = y^2 - x^2$

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 . Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que tenemos: $z = y^2 - x^2$.

Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

corte con el plano $x = 0$ $z = y^2$ que es una parábola hacia arriba

corte con el plano $y = 0$ $z = -x^2$ que es una parábola hacia abajo.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante

$y^2 - x^2 = z$ para cada valor de z tenemos una hipérbola

Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

para valores positivos de z

nivel $z = 0 \rightarrow y^2 = x^2 \rightarrow \{y = x \text{ o } y = -x\}$ dos rectas

nivel $z = 1 \longrightarrow y^2 - x^2 = 1 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OY
 nivel $z = 4 \longrightarrow y^2 - x^2 = 4 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OY
 para valores negativos de z
 nivel $z = -1 \longrightarrow x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OX
 nivel $z = -2 \longrightarrow x^2 - y^2 = 4 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OX
 La gráfica es la *silla de montar*

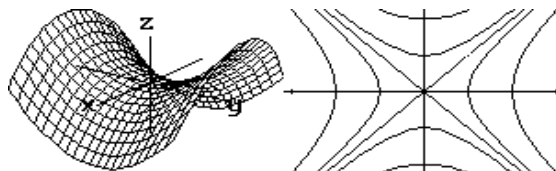


Figura 1.24: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$

Resumen de algunas gráficas

$f(x, y) = k$ plano horizontal de altura k

$f(x, y) = ax + by + c$ plano

$f(x, y) = x^2 + y^2$ paraboloide

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cono

$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ semiesfera superior

$f(x, y) = \sqrt{r^2 - ax^2 - by^2}$ elipsoide superior

$f(x, y) = y^2 - x^2$ silla de montar.

1.1.5 Representación térmica de las funciones de varias variables.

En Matemáticas a los conceptos teóricos se les buscan *representaciones* que nos permitan *visualizar*, mediante imágenes gráficas, sus propiedades abstractas, con objeto de comprenderlas y recordarlas mejor. Así, para tener una visualización gráfica de las propiedades de las funciones, hemos imaginado que las funciones de una variable representan curvas en el plano y las de dos variables superficies en el espacio. Sin embargo, este sistema no nos permite visualizar las funciones de tres o más variables y tenemos que conformarnos con imaginar una generalización de los conceptos aprehendidos en dos o tres dimensiones.

En realidad una función no es ni una curva ni una superficie, sino una correspondencia entre magnitudes, y según sea el significado físico que le demos a esas magnitudes (espacio, tiempo, temperatura, etc.) la función tendrá un significado físico u otro. Por eso, aunque la representación gráfica haya pasado a formar parte integrante del contenido teórico de las funciones, no debemos olvidar que es simplemente un *instrumento* de ayuda, y, por lo tanto, no nos debemos sentir atrapados por ese instrumento. Para comprender algunos conceptos, como por ejemplo las curvas de nivel, son también apropiadas

otras representaciones de las funciones distintas de la representación gráfica. Las funciones de dos variables se pueden interpretar como la temperatura en cada punto de una placa horizontal, siendo esta placa el dominio de la función. Las de tres variables se pueden interpretar como la temperatura en cada punto de una región del espacio. Las curvas de nivel serían las curvas de igual temperatura, es decir, las isotermas. En el caso de tres variables las superficies de nivel serían las superficies de igual temperatura (superficies isotermas).

1.2 Límite y continuidad.

1.2.1 Introducción

La gráfica de una función de una variable es una curva en el plano.

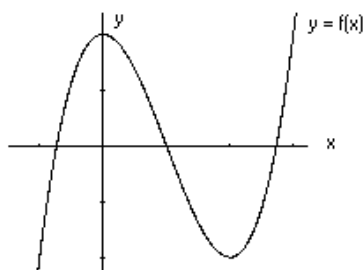


Figura 1.25: Gráfica de una función de una variable

Esta curva puede presentar las siguientes situaciones de discontinuidad.

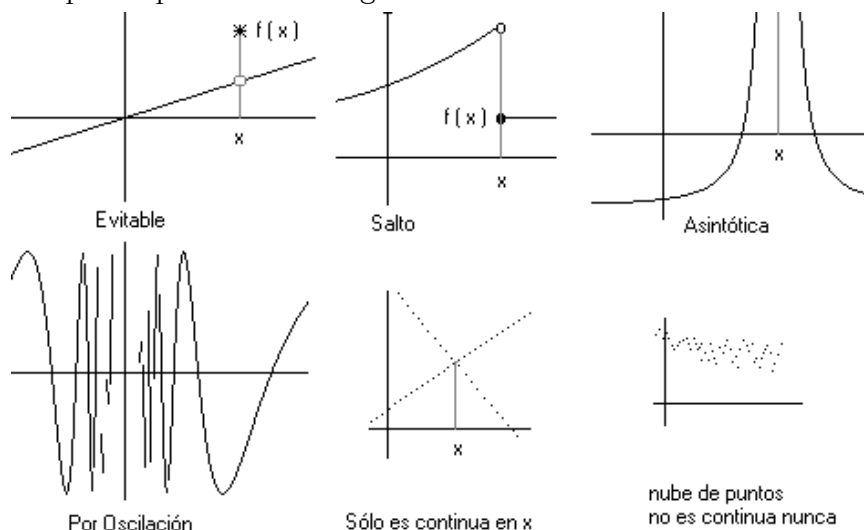


Figura 1.26: Situaciones de discontinuidad en funciones de una variable

En dos variables pueden darse situaciones de discontinuidad de todo tipo.

1.2.2 Límite y continuidad en dos variables.

El límite de una función en un punto P es l si los valores que toma la función en los alrededores de P están tan cerca de l como queramos (el valor que la función tome en P no interesa a la hora de calcular el límite)

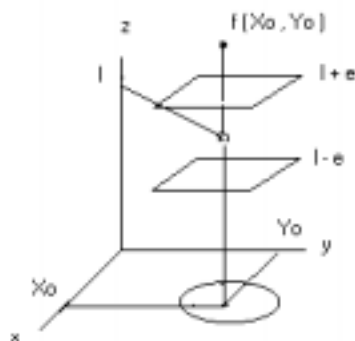


Figura 1.27: Límite de una función de dos variables.

Para poder hablar de límite de una función en un punto, la función tiene que estar definida en los alrededores del punto. Formalmente la definición de límite es la siguiente:

Definición 1.1 *Límite de una función en un punto.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon$$

Hay que tener en cuenta que para que exista el límite *todos* los puntos del entorno tiene que tener su imagen aproximadamente a la misma altura. Si unos puntos del entorno se aproximan a un valor y otros a otros, entonces el límite no existe. (El punto en cuestión no cuenta).

Definición 1.2 *Continuidad.* Una función se dice que es continua en un punto, si el valor que toma la función en el punto coincide con el límite en dicho punto.

$$f(x,y) \text{ continua en } (x_0, y_0) \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Ejemplo 1.11 Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

hallar gráficamente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad y \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y)$$

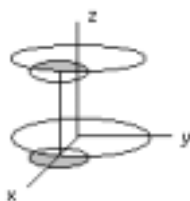
Solución:

Figura 1.28: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y)$ no definido

Todas las funciones elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas, luego para calcular el límite de una función elemental en un punto (x_0, y_0) en el que está definida bastará sustituir x e y por x_0 e y_0 respectivamente. El problema estará en los puntos en los que la función no esté definida. Por lo tanto, al calcular un límite lo primero que intentaremos es la sustitución directa, y sólo en el caso de que nos encontremos con una indeterminación intentaremos romperla por algún método. En dos variables no tienen sentido las reglas de L'Hopital

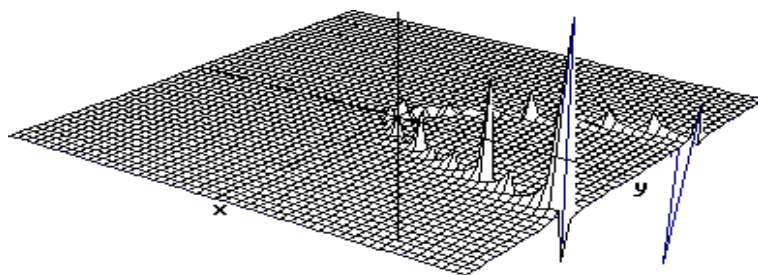
Ejemplo 1.12 *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} xy = 6$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{-6}{4 + 9} = \frac{-6}{13}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\arcsen \frac{x}{y}}{1 + xy} = \frac{\arcsen 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/4, 2)} y \sen xy = 2 \sen \frac{\pi}{4} 2 = 2 \sen \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2$

Ejemplo 1.13 *Hallar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x, y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y}$$

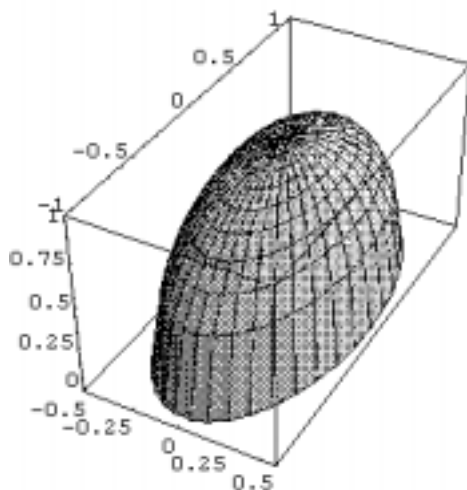
Solución: $x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$ La función es discontinua a lo largo de la parábola $y = x^2$

Figura 1.29: $f(x, y) = \frac{xy+1}{x^2-y}$

Ejemplo 1.14 *Calcula el valor de c para que la siguiente función sea continua en todo el plano:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 1 \\ c & \text{si } x^2 + 4y^2 > 1 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de la función $\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ es una especie de semielipsoide superior, con contorno sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. En el contorno toma el valor 0, en efecto, $\sqrt{1 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{1 - (x^2 + 4y^2)}$ que vale 0 para $x^2 + 4y^2 = 1$. Fuera del contorno ha de ser constante ($= c$). Luego, para que se mantenga continua fuera del contorno ha de valer cero, por lo tanto $c = 0$.

Figura 1.30: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$

Ejemplo 1.15 *Hallense los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x, y) = \cos \frac{1}{xy}$$

Solución: El único problema que presenta la función es en el cociente, donde el denominador debe ser distinto de 0. Teniendo en cuenta que $xy = 0$ cuando $x = 0$ (eje OY) o cuando $y = 0$ (eje OX). La función será discontinua en los dos ejes de coordenadas.

Ejemplo 1.16 *Calcula los siguientes límites:*

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] = 1 - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^2 + y^2) = \ln 0^+ = -\infty$

1.2.3 Comprobando límites aplicando la definición:

Mediante la definición de límite se puede comprobar si un límite dado es correcto o no, pero no se pueden calcular límites. La comprobación suele ser complicada y artificial. (Tenemos que imaginar que *alguien* nos va a dar el valor de ε y nosotros tenemos que encontrar el correspondiente valor de δ que hace que sea cierta la implicación. En general, nuestro δ dependerá del ε que nos den: $\delta = \delta(\varepsilon)$).

Ejemplo 1.17 *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución: Tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 < \delta^2 \quad \implies \quad |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor para δ tal que cuando $x^2 + y^2 < \delta^2$, se tenga que $|f(x, y)| < \varepsilon$. Para ello partimos de la expresión $|f(x, y)|$ y vemos cuánto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε , teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen es $x^2 + y^2 < \delta^2$, o bien $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$|f(x, y)| = \left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ , el propio ε

Ejemplo 1.18 Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = 0$$

Solución: Igual que antes, tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 < \delta^2 \implies |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor para δ tal que cuando $x^2 + y^2 < \delta^2$, se tenga que $|f(x, y)| < \varepsilon$. Para ello partimos de la expresión $|f(x, y)|$ y vemos cuanto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε , teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen será $x^2 + y^2 < \delta^2$, o bien $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$|f(x, y)| = |(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}| \leq |x^2 + y^2| < \delta^2 = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ , $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Acotaciones usuales en el cálculo de límites: En el cálculo de límites, además de las acotaciones $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$, se utilizan las siguientes:

$$0 \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \implies \boxed{\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1} \implies \boxed{-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1}$$

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \implies \boxed{0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1}$$

Ejemplo 1.19 Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución: Igual que antes, tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 < \delta^2 \implies |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor para δ tal que cuando $x^2 + y^2 < \delta^2$, se tenga que $|f(x, y)| < \varepsilon$. Para ello partimos de la expresión $|f(x, y)|$ y vemos cuanto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε , teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen será $x^2 + y^2 < \delta^2$, o bien $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$|f(x, y)| = \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| = 5|y| \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 5|y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} < 5\delta = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ , $\delta = \varepsilon/5$

(en la demostración hemos utilizado la acotación $\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$, y por otro lado hemos tenido en cuenta que: $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$)

Ejemplo 1.20 Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Solución:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |x| \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ , $\delta = \varepsilon$

Ejemplo 1.21 Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = 0$$

Solución:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} \right| = \left| \frac{x^4}{x^4 + y^4} \right| |y| \leq |y| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ , $\delta = \varepsilon$

1.2.4 Cálculo de límites mediante operaciones algebraicas

Con las funciones de varias variables no se pueden aplicar las Reglas de L'Hôpital.

Ejemplo 1.22 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{y - 1}{y^2 - 1} \right]$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^3 - 1)(y^4 - 1)}{(x - 1)(y^2 - 1)}$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1 - 1}$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} (1 + x^2 y)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{6x - 2y}{9x^2 - y^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{2(3x - y)}{(3x)^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{2(3x - y)}{(3x + y)(3x - y)} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{2}{(3x + y)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{y - 1}{y^2 - 1} \right] = \left[\frac{0}{0} + \frac{0}{0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{y-1}{(y+1)(y-1)} \right] =$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left[x + 1 + \frac{1}{y+1} \right] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^3 - 1)(y^4 - 1)}{(x - 1)(y^2 - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(y^2 + 1)(y^2 - 1)}{(x-1)(y^2 - 1)} =$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + x + 1)(y^2 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1 = 2$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} (1 + x^2 y)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \left[(1 + x^2 y)^{\frac{1}{x^2 y}} \right]^{\frac{x^2 y}{x^2}} = e^3$

Aquí se ha tenido en cuenta la definición del número e , $\lim_{X \rightarrow 0} (1 + X)^{\frac{1}{X}} = e$

1.2.5 Teorema del encaje y de la acotación

Si una función está comprendida, en los alrededores de un punto, entre dos que tienen el mismo límite, en dicho punto, entonces dicha función también tiene el mismo límite en dicho punto.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Si una función tiene límite cero, en un punto, y otra está acotada en los alrededores del punto, entonces su producto también tiene límite cero en dicho punto.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \text{ acotada} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \end{array} \right\} \implies -k \leq x \leq k \implies -kf(x) \leq f(x)g(x) \leq kf(x) \implies$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \implies 0 \bullet \text{Acot} = 0$$

Ejemplo 1.23 *Calcula los siguientes límites.*

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$

Solución:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy} = 0 \cdot \operatorname{Acot} = 0$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0 \cdot \operatorname{Acot} = 0$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot \operatorname{Acot} + 0 \cdot \operatorname{Acot} = 0$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} (x-1)y \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + (y+2)^2} =$
 $= 0 \cdot \operatorname{Acot} = 0$

Este límite también puede hacerse mediante el cambio de variables $u = x - 1$, $v = y + 2$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y+2)^2} &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{(v-2)u^3}{u^2 + v^2} = \\ &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} (v-2)u \frac{u^2}{u^2 + v^2} = (-2) \cdot 0 \cdot \operatorname{Acot} = 0 \end{aligned}$$

1.2.6 Infinitésimos equivalentes.

Definición 1.3 Infinitésimo en un punto. Se llama infinitésimo en un punto X_0 a una función cuyo límite en dicho punto sea cero.

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = 0$$

Definición 1.4 Infinitésimos equivalentes. Dos infinitésimos en un mismo punto se dice que son equivalentes, cuando el límite de su cociente es 1.

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1 \quad \implies \quad f(X) \approx g(X) \quad (\text{en } X = X_0)$$

Sustitución de infinitésimos. Si un infinitésimo está multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente para simplificar los cálculos.

Supongamos que $f(X) \approx g(X)$, entonces será $\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = 1$. Y supongamos que $f(X)$ aparece multiplicando dentro de un límite.

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) \bullet h(X) = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{g(X)} g(X) h(X) = \lim_{X \rightarrow X_0} g(X) \bullet h(X)$$

Con lo cual hemos sustituido $f(X)$ por $g(X)$ y el límite puede resultar más fácil.

Cuando un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se puede sustituir por otro equivalente.

$$\lim_{X \rightarrow X_0} [f(X) + h(X)] \neq \lim_{X \rightarrow X_0} [g(X) + h(X)]$$

Algunos infinitésimos en el Origen ($X_0 = 0$).

Los infinitésimos más usuales, en el origen son:

Trigonométricos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\approx x & \operatorname{arcsen} x &\approx x \\ \tan x &\approx x & \operatorname{arctan} x &\approx x \\ 1 - \cos x &\approx \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Logarítmicos:

$$\ln(1+x) \approx x \Rightarrow \begin{cases} x \approx \ln(1+x) \\ e^x - 1 \approx x \\ a^x - 1 \approx x \ln a \\ (1+x)^n \approx 1 + nx \\ \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} \end{cases}$$

La x puede ser cualquier función. Lo importante es que toda la función tienda a cero.

$$\text{si } f(x) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} f(x) \approx f(x)$$

Ejemplo 1.24 *Calcula los siguientes límites.*

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y = 2$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{\tan(x^2y)} - 1}{2 \operatorname{sen}(x^2y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x^2y)}{2x^2y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{2x^2y} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1 - \cos(x^2 - y)}{(x - \sqrt{y})^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^2 - y)^2}{2(x - \sqrt{y})^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^2 - y)^2 (x + \sqrt{y})^2}{2(x^2 - y)} =$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x + \sqrt{y})^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\operatorname{sen} x \ln(1+y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 = 1$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3y)}{2xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x3y}{2xy} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(y^2 + 2y - 3)(1 - \cos x)}{x^2(y - 1)} = \\
& = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(y - 1)(y + 3)x^2/2}{x^2(y - 1)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
7. \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos 2x)(\cos 3x - 1)}{5x^2y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{4x^2}{2}(-\frac{9y^2}{2})}{5x^2y} = \\
& = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-9y}{5} = 0 \\
8. \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^x - 1)(e^{2y} - 1)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x2y}{xy} = 2
\end{aligned}$$

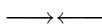
1.2.7 Inexistencia de límites.

Cuando no sepamos calcular un límite, intentaremos demostrar que dicho límite no existe. Ésto lo podemos hacer por dos métodos:

- Mediante los límites direccionales.
- Mediante los límites reiterados.

Límites direccionales.

En una variable, para que existiera el límite, los límites por la derecha y por la izquierda tenían que coincidir.



En dos variables no tiene sentido hablar de límites laterales.

En dos variables existen infinitos caminos para acercarnos al punto, y los límites siguiendo todas las direcciones tienen que coincidir. Para ver que una función no tiene límite en un punto se siguen varios caminos de aproximación al punto y se ve que la función tiene un límite distinto por cada camino. El problema será determinar si existe un camino que conduce a otra parte. En la práctica los caminos que se suelen seguir son rectas y parábolas. (el camino por rectas se sigue cuando las potencias de denominador son del mismo grado, y el camino por parábolas cuando son de distinto grado, intentando igualar los grados).

Ejemplo 1.25 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Solución: Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xm \cdot x}{x^2 + m^2 x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} = f(m) \end{aligned}$$

El límite no existe ya que depende del valor de m . Es decir, según la recta por la que nos aproximemos al punto tendríamos un valor del límite u otro. Para $m = 1$, nos estaríamos moviendo por la recta $y = x$, y sería $l = 1/2$. Para $m = -1$, estaríamos moviéndonos por la recta $y = -x$, y sería $l = -1/2$.

En este ejemplo podemos visualizar lo que ocurre en el origen de una manera muy gráfica. Imaginemos una alfombra de goma, con un agujero en el centro, y la atravesamos con dos listones, uno por debajo y el otro por encima, de manera que se crucen en el agujero (el de abajo de la alfombra pasaría por encima del otro). El que está por encima de la alfombra lo fijamos al suelo y el que está por debajo lo levantamos hasta una altura de un metro, sin que se rompa la alfombra. Es evidente que el agujero se estira todo el metro.

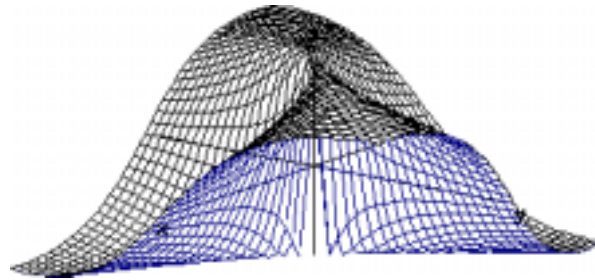


Figura 1.31: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Ejemplo 1.26 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$$

Solución: Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx \\ x \rightarrow 0}} \frac{m^2 x^2}{x + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x}{1 + m^2 x} = 0$$

para todo camino recto de la forma $y = mx$ el límite vale 0, sin embargo, no podemos afirmar que el límite valga cero, ya que en otras direcciones puede tener otro valor. En efecto, si nos acercamos al origen por el camino curvo $x = y^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^2}{y^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

Luego el límite no existe ya que al movernos por una parábola obtenemos distinto valor que al movernos por una recta.

Ejemplo 1.27 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

Solución: Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx \\ x \rightarrow 0}} \frac{2x^2mx}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = 0$$

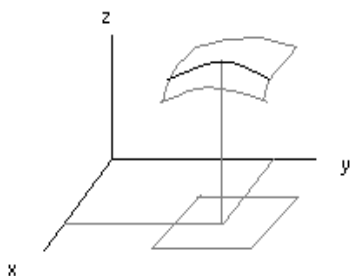
para todo camino recto de la forma $y = mx$ el límite vale 0, sin embargo, no podemos afirmar que el límite valga cero, ya que en otras direcciones puede tener otro valor. En efecto, si nos acercamos al origen por el camino curvo $y = x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} \frac{2x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{1+1} = 1$$

Luego el límite no existe ya que al movernos por una parábola obtenemos distinto valor que al movernos por una recta.

Límites parciales iterados (o reiterados).

Se pueden calcular los siguientes límites:



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \neq y_0}} f(x, y) \right]$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x, y) \right]$$

Figura 1.32: Límites iterados

Si estos dos límites son distintos, entonces la función no tiene límite, pero si son iguales o alguno de ellos no existe, entonces no se puede asegurar nada sobre el límite doble.

Ejemplo 1.28 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} [1] = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\frac{0 - y^2}{0 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} [-1] = -1$$

Luego el límite doble no existe.

Ejemplo 1.29 *Demostrar que el siguiente límite existe, y sin embargo no existen ninguno de los iterados.*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)$$

Solución: El límite doble existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0 \cdot \operatorname{Ac} + 0 \cdot \operatorname{Ac} = 0 + 0 = 0$$

Mientras que los iterados no existen.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \neq x_0}} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} [\text{No definido} + 0] = \text{No definido}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \neq y_0}} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} [0 + \text{No definido}] = \text{No definido}$$

1.2.8 Límites en el infinito.

Se trata de ver el comportamiento de la función en el contorno de una circunferencia de radio infinito.

Ejemplo 1.30 *Calcular los siguientes límites.*

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} \qquad 2. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} e^{-(x^2 + y^2)}$$

Solución:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} e^{-(x^2 + y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{e^{(x^2 + y^2)}} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 1.31 *Representa la función: $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$*

Solución: El dominio de la función es todo \mathbb{R}^2 .

Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z , con lo que tenemos:

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

$$\text{corte con el plano } x = 0 \quad z = e^{-y^2}$$

corte con el plano $y = 0$ $z = e^{-x^2}$

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante

$$e^{-(x^2+y^2)} = z \quad \text{de donde} \quad -(x^2 + y^2) = \ln z \Rightarrow x^2 + y^2 = -\ln z$$

Damos varios valores a z para ir viendo las curvas de contorno a distintas alturas:

para el nivel $z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$

para niveles $0 < z < 1 \Rightarrow -\ln z$ es positivo, luego se trata de circunferencias de radio $\sqrt{-\ln z}$

Y teniendo en cuenta que el límite en el infinito es cero, resulta la siguiente gráfica:

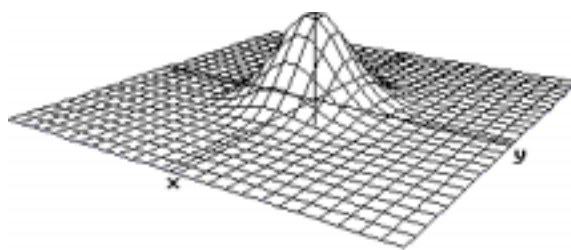


Figura 1.33: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

1.2.9 Problemas propuestos

1. Describese el dominio de los siguientes campos escalares:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} & \text{b) } f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} & \text{c) } f(x, y) = \arccos \frac{y}{x} \\ \text{d) } f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2) & \text{e) } f(x, y) = \frac{xy}{x-y} & \text{f) } f(x, y) = \ln(4 - x - y) \\ \text{g) } f(x, y) = x^2 + y^2 & \text{h) } f(x, y) = e^{x/y} & \text{i) } f(x, y) = \ln(4 - xy) \end{array}$$

2. Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z & \psi(x) = \cos x \\ g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z & \varphi(x) = \sin x \end{array}$$

Expresa, en la forma más simplificada posible:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (f+g)(x, y, z) & \text{b) } f(\psi(x), \varphi(x), 1) & \text{c) } g(f(x, y, z), g(x, y, z), 4x^2z) \\ \text{d) } \psi(f(x, y, z)) & \text{e) } g(\psi(x), \varphi(x), 0) & \text{f) } \sqrt{\frac{f(x, y, z) + g(x, y, z)}{2}} \end{array}$$

3. Describese la gráfica de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = k & \text{b) } g(x, y) = ax + by + c & \text{c) } h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{d) } l(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & \text{e) } m(x, y) = \sqrt{r^2 - ax^2 - by^2} & \text{f) } n(x, y) = y^2 - x^2 \end{array}$$

4. Describir las curvas $f(x, y) = k$ o superficies de nivel $f(x, y, z) = k$, para los siguientes campos f y los valores de k que se indican:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ | $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ |
| b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ | $k = 0, 2, 4, 6, 8$ |
| c) $f(x, y) = xy$ | $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$ |
| d) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ | $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ |
| e) $f(x, y, z) = 4x + y + 2z$ | $k = 4$ |
| f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ | $k = 9$ |
| g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ | $k = 1$ |
| h) $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$ | $k = 0$ |

5. Hallense, si existen, los siguientes límites:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln 1 + x^2 y^2 $ | a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,6)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ |
| c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$ | d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi/2)} \sec x \tan y$ |
| e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + y + 1}$ | f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2 + 1}$ |
| g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right) \left(\frac{y - 2}{y^2 - 4} \right)$ | h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,2)} \frac{xy + y - 2x - 2}{x + 1}$ |
| i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 y^3 - 1}{xy - 1}$ | j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}$ |
| k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ | l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ xy }$ |
| m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ | n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ |
| o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^3}$ | p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ |
| q) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2 - 4)}{(y + 2) \operatorname{sen} x}$ | r) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\operatorname{sen} x \ln(1 + y)}$ |
| s) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \operatorname{sen}(xy)}{1 - e^{x^2 + y^2}}$ | t) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + yx^2)}{\tan y \cdot \sqrt{1 - \cos(x^2 + y^2)}}$ |

6. Estudíese la continuidad de las siguientes funciones, prolongándolas por continuidad, si es posible, a puntos que no sean de su dominio.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ | b) $\frac{2x + y^2}{x^2 + y^2}$ | c) $\frac{x^3 + \ln y}{(y - 1)^3 + x^6}$ |
| d) $\frac{1}{x} \operatorname{sen} xy$ | e) $\frac{x^2 + y^2}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ | f) $\frac{x^3 + \ln(y + 1)}{y^3 + x^6}$ |

7. Estudiese la continuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } (x, y) \neq (1, -3) \\ 10 & \text{si } (x, y) = (1, -3) \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{c) } \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 28 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{x^3 - 4y^3}{x^2 - 4y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{e) } \begin{cases} \frac{xy}{4x^2 + 5y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2 - 4)}{(y+2) \operatorname{sen} x} & \text{si } (x, y) \neq (0, -2) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, -2) \end{cases}
 \end{array}$$

Soluciones:

1. $\left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + y^2 \leq 4 & \text{Círculo} \\ \text{c) } |y| \leq |x|, x \neq 0 & \text{Ángulos opuestos} \\ \text{e) } x \neq y & \text{Plano, salvo la recta } y = x \\ \text{g) } \mathbb{R}^k & \text{Todo el plano} \\ \text{i) } xy < 4 & \text{franja entre hipérbola} \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{b) } x \neq y & \text{Plano, salvo la recta } y=x \\ \text{d) } x^2 + 4y^2 < 4 & \text{Interior de la elipse} \\ \text{f) } x + y < 4 & \text{Semiplano} \\ \text{h) } y \neq 0 & \text{Plano, salvo eje OX} \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2 & \text{b) } 0 & \text{c) } 4x^2y^2 \\ \text{d) } \cos(x^2 + y^2 - z) & \text{e) } \cos(2x) & \text{f) } |x| \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{lll} \text{a) } \text{Plano horizontal} & \text{b) } \text{Plano} & \text{c) } \text{Cono} \\ \text{d) } \text{Semisfera superior} & \text{e) } \text{Semielipsoide superior} & \text{f) } \text{Silla de montar} \end{array} \right.$
4. $\left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } \text{Circunferencias concéntricas} & \text{b) } \text{Circunferencias concéntricas} \\ \text{c) } \text{Hipérbola} & \text{d) } \text{Rectas paralelas} \\ \text{e) } \text{Plano} & \text{f) } \text{Esfera} \\ \text{g) } \text{Paraboloide} & \text{h) } \text{Cono} \end{array} \right.$
5. $\left\{ \begin{array}{llll} \text{a) } \ln 2 & \text{b) } \frac{5}{3} & \text{c) } 0 & \text{d) } \text{No existe} \\ \text{e) } 1 & \text{f) } 0 & \text{g) } -\frac{1}{8} & \text{h) } 0 \\ \text{i) } 3 & \text{j) } \text{No existe} & \text{k) } \text{No existe} & \text{l) } \text{No existe} \\ \text{m) } \text{No existe} & \text{n) } \text{No existe} & \text{o) } 0 & \text{p) } 2 \\ \text{q) } 0 & \text{r) } 1 & \text{s) } 0 & \text{t) } \text{No existe} \end{array} \right.$
6. $\left\{ \begin{array}{lll} \text{a) } f(0, 0) = 0 & \text{b) } \mathbb{R}^k - \{(0, 0)\} & \text{c) } y \neq 1 - x^2, y > 0 \\ \text{d) } f(0, y) = y & \text{e) } x^2 + y^2 < 1 & \text{f) } y > -1, y \neq -3 \end{array} \right.$
7. $\left\{ \begin{array}{lll} \text{a) } \text{Continua} & \text{b) } y \neq -x & \text{c) } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{d) } |x| \neq 2|y| & \text{e) } (x, y) \neq (0, 0) & \text{f) } \text{Continua en } (0, -2) \end{array} \right.$