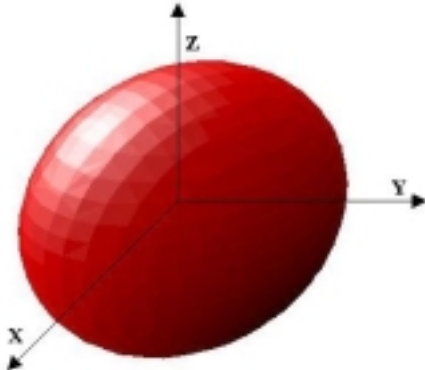
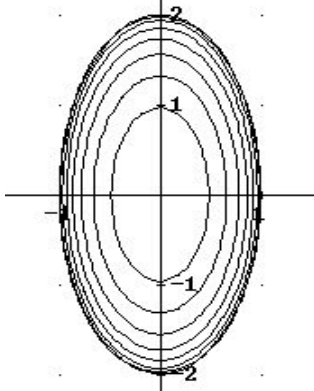
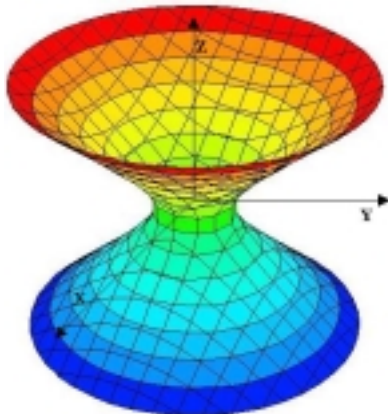
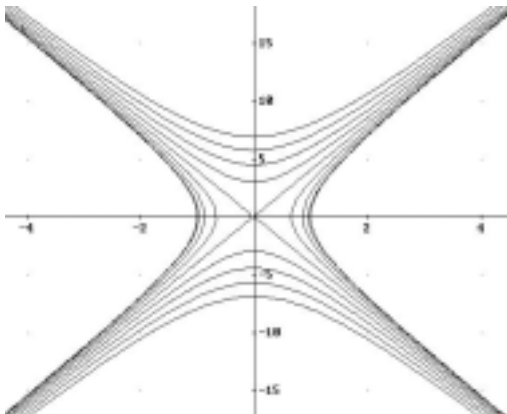
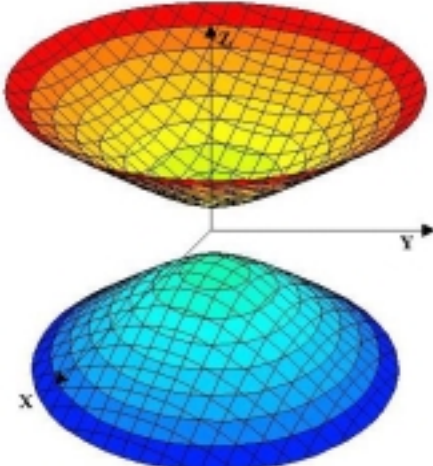
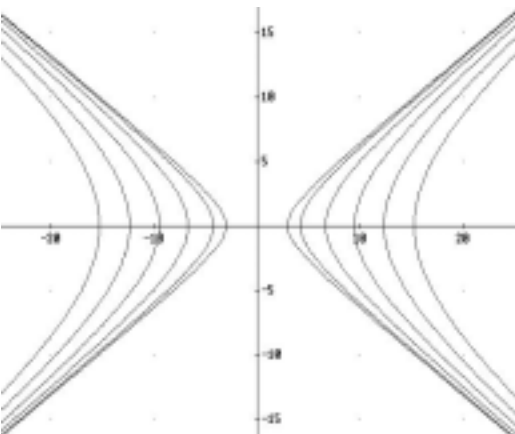
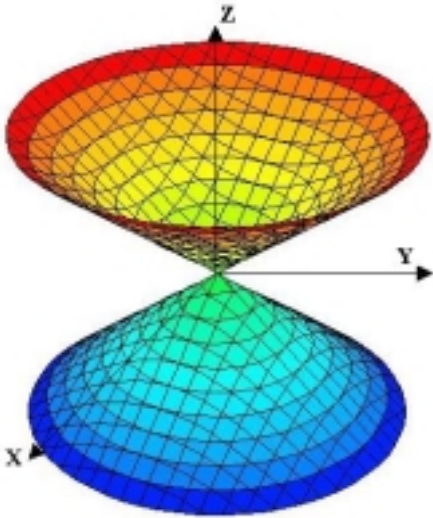
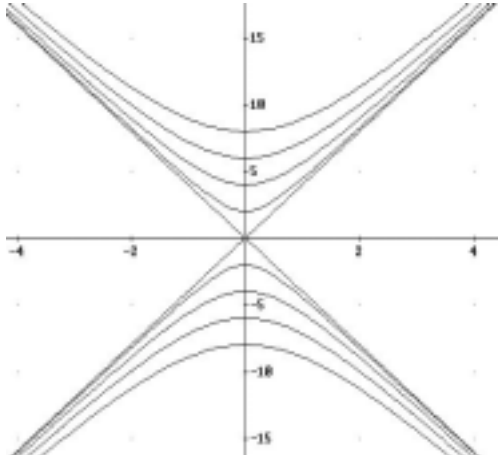
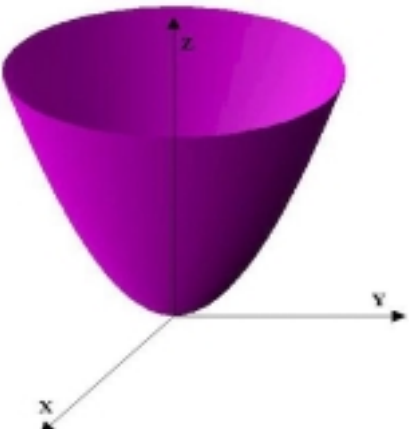
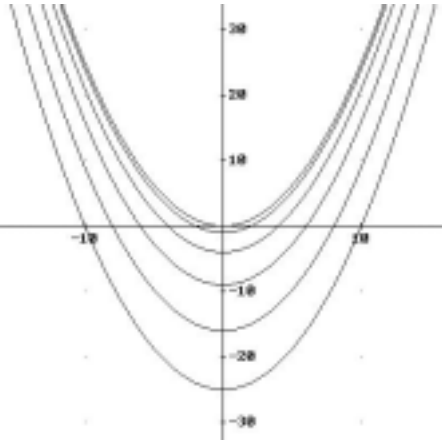
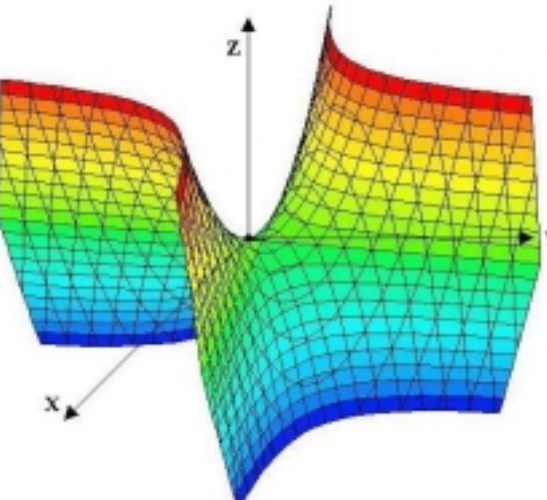
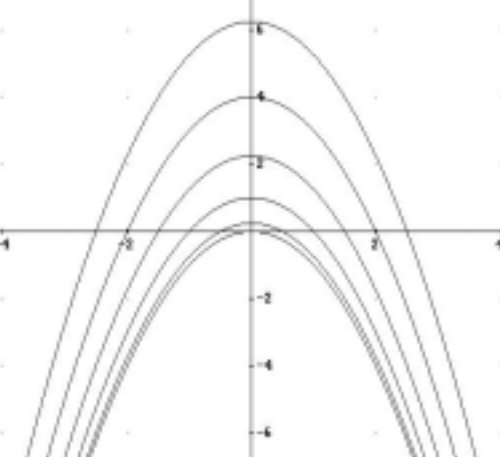


$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (16)$$

Existen 6 tipos básicos de superficies de este tipo: conos elípticos, elipsoides, paraboloides elípticos, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas y paraboloides hiperbólicos, además de cilindros (o sábanas) elípticos, parabólicos e hiperbólicos. El nombre lo reciben debido a que las trazas de este tipo de superficies son secciones cónicas.

En las siguientes figuras se muestran algunas de estas superficies con algunas trazas.

Ecuación	Superficie	Algunas trazas
Elipsoides $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		
Hiperboloides de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		
Hiperboloides de dos hojas $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		

<p>Conos elípticos</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$		
<p>Paraboloides elípticos</p> $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$		
<p>Paraboloides hiperbólicos</p> $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$		

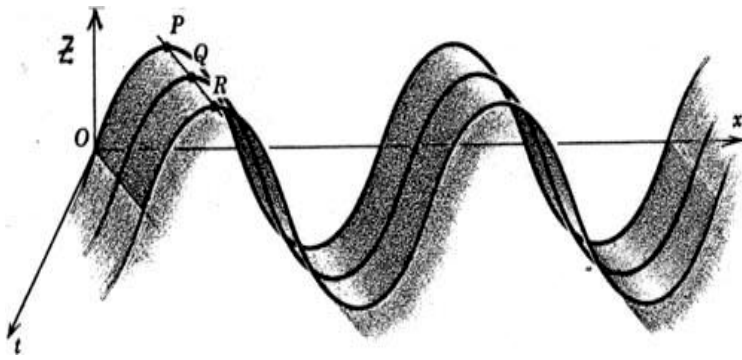
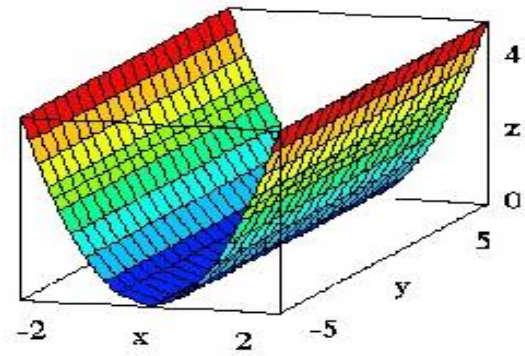


Figura 36: Sábana (o cilindro) senoidal

Figura 37: Cilindro $z=x^2$

En muchos otros campos de la ciencia es importante analizar las zonas del dominio en las que una función de varias variables tiene la misma imagen.

Por ejemplo, en una primera aproximación algunas superficies aerodinámicas se parecen a algunas superficies matemáticas como se muestra en la Figura 38 (gráfica generada con *DPGraph*).

En medicina se utilizan representaciones gráficas de este tipo para estudiar diversas enfermedades, por ejemplo, en la Figura 39 se muestra la imagen de un cerebro obtenida por medio de PET (*Positron Emission Tomography*) la parte oscura de la izquierda indica daños debidos a un golpe mientras que los colores brillantes en el resto de la imagen indican un flujo normal en la sangre.

En la Figura 40 se observa una imagen obtenida por DSA (*Digital Subtraction Angiography*) en donde se muestra una arteria con un peligroso aneurisma en la base del cerebro.

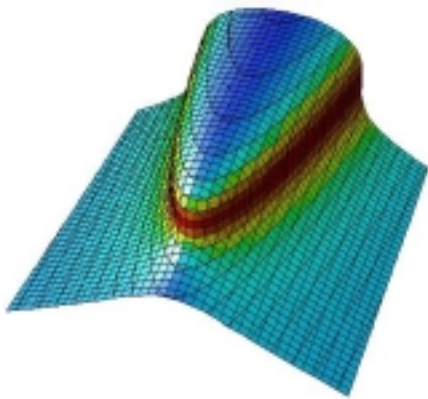
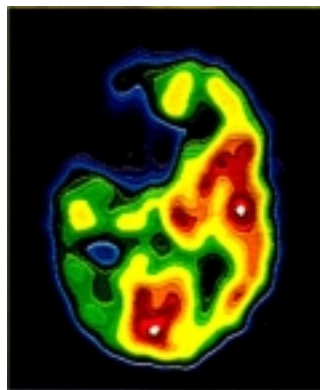
Figura 38: Gráfica de $x^2+2y^2+3z^2=2$ 

Figura 39: Imagen obtenida por PET

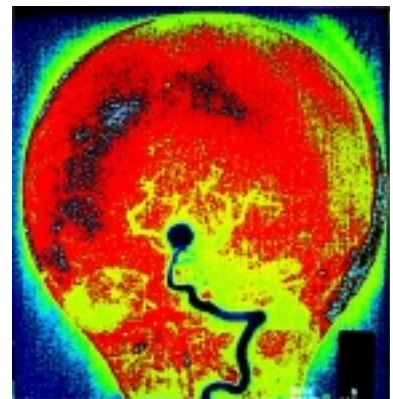


Figura 40: Imagen obtenida por DSA

La Figura 41 muestra a un feto de 6 meses de edad con la boca abierta y fue obtenida por medio de una sonografía, método que consiste en lanzar al útero ondas de sonido de alta frecuencia para después medir el eco.

La Figura 42 muestra el cuerpo de una niña en donde se observa un tumor maligno entre un riñón y la columna vertebral, la imagen fue obtenida por medio de MRI (*Magnetic Resonance Imaging*).

La Figura 43 fue obtenida por medio de CT (*Computer Tomography*) en la parte central se observa una representación tridimensional obtenida a partir de docenas de trazas, la cruz señala un tumor, las imágenes de la izquierda muestran los diferentes ángulos desde los que se trata de ubicar al tumor.

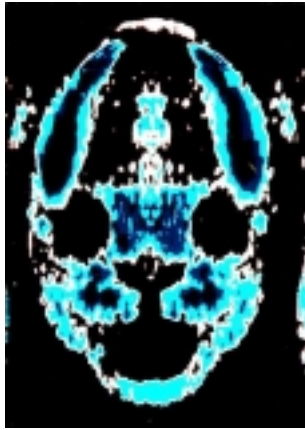


Figura 41: Imagen obtenida por sonografía



Figura 42: Imagen obtenida por MRI



Figura 43: Imagen obtenida por MRI

Esta visión por computadora del interior del cuerpo humano se basa en la idea de obtener información tridimensional a partir de informaciones bidimensionales, que son precisamente las trazas. En la Figura 44 se muestra un diagrama acerca del uso de las CT, en la Figura 45 el uso de PET y en la Figura 46 el uso de MRI.

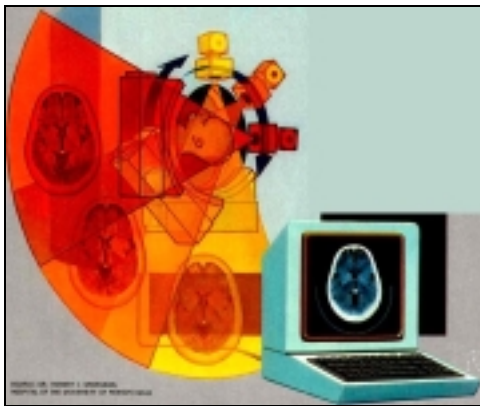


Figura 44



Figura 45

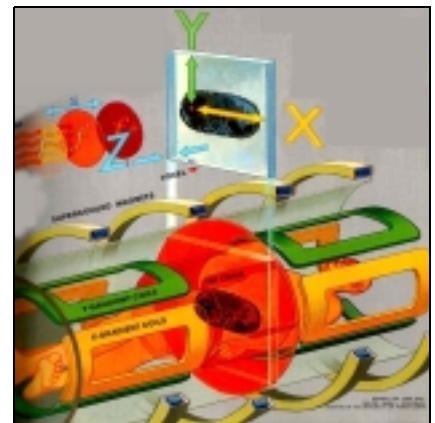


Figura 46

En Astronomía y en Ecología se utilizan representaciones similares para indicar diferentes temperaturas, por ejemplo, en la Figura 47 se muestra un mapa estelar en donde se muestra la primera evidencia visual de otro posible sistema solar diferente del nuestro (imágenes claras en la figura). En la Figura 48 se muestra un objeto extraño (más frío) cerca de una nova que está muriendo (más caliente). En la Figura 49 muestra una imagen de satélite en donde se representan las temperaturas de las corrientes marinas en una franja costera, el agua más caliente se muestra en rojo y la más fría en azul y verde.

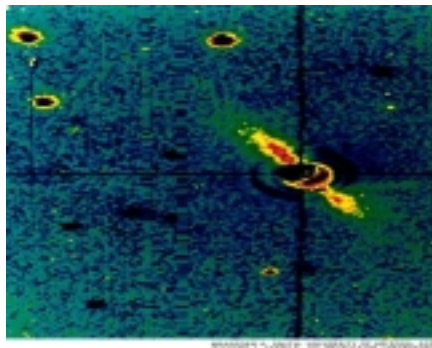


Figura 47

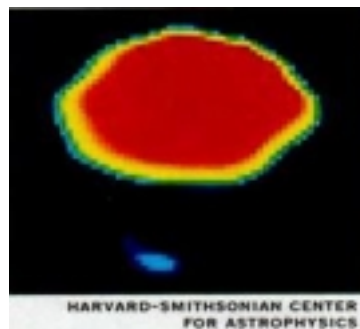


Figura 48

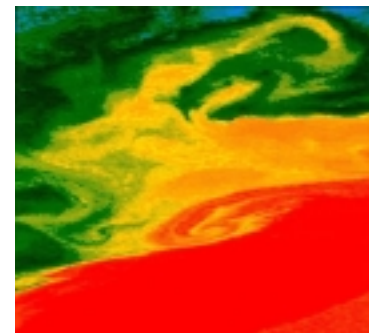


Figura 49

2. LÍMITES Y CONTINUIDAD

En esta parte generalizaremos los conceptos de límite y continuidad para funciones de varias variables y como también era de esperarse trataremos de calcar en la medida de lo posible las definiciones de Cálculo I por lo que debes tenerlas a la mano. Recuerda que los conceptos de límite y continuidad tienen que ver con la idea de analizar a que valor se acercan las imágenes cuando nos acercamos a un punto, si bien en el caso de funciones de una variable podemos acercarnos a un punto solo por dos direcciones, para el caso de funciones de varias variables, las cosas se complican en gran medida debido a que podemos acercarnos a un punto por una infinidad de direcciones, para hacer un análisis de este tipo será necesario entonces hacer una generalización del concepto de intervalo, esta generalización se hace en base a la siguiente definición. Por otro lado, para el caso de puntos en el dominio de funciones de varias variables, al ser vectores, la distancia estará medida por la norma.

DEFINICION 9 (bola)

Dado \mathbf{X} un punto de \mathbb{R}^n , la **BOLA** \mathbf{B} de centro \mathbf{X}_0 y radio r se define como el conjunto de todos los puntos de \mathbb{R}^n cuya distancia a \mathbf{X}_0 es menor ó igual que r . Es decir, $\mathbf{B} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \leq r\}$

Para el caso de \mathbb{R}^3 , \mathbf{B} es una esfera con centro $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y radio r . Su ecuación está dada por

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r^2 \quad (17)$$

Para el caso de \mathbb{R}^2 , \mathbf{B} es un **disco** con centro $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$ y radio r . Su ecuación está dada por

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2 \quad (18)$$

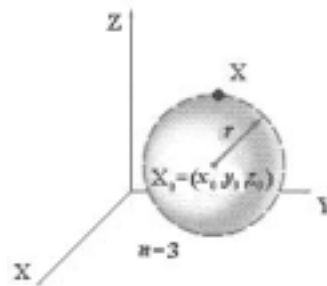


Figura 50

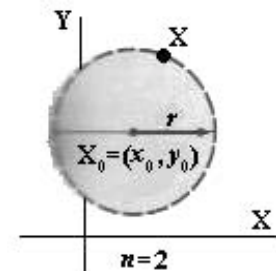


Figura 51

El análogo unidimensional de bolas en el espacio y discos en el plano son los usuales intervalos (tanto abiertos como cerrados) en la recta real con centro x_0 y radio r .

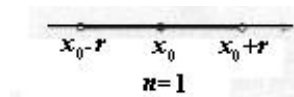


Figura 52

Los puntos que satisfacen $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < r$ se dicen **puntos interiores** de \mathbf{B} , mientras que los puntos que satisfacen $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| = r$, se dicen **puntos frontera**. Si solo se consideran los puntos interiores, estamos en el análogo de los intervalos abiertos y hablamos entonces de una bola abierta, mientras que si se consideran los puntos interiores y los puntos frontera estamos en el análogo de los intervalos cerrados y hablamos entonces de una bola cerrada.

2.1 Definición de continuidad

La noción de que una función sea continua esta estrechamente relacionada con la idea de que su gráfica no se rompa; esto es, que la superficie se extienda de manera uniforme sin que contenga agujeros, cortes o defasamientos es como si una vez extendida la superficie no se pudiera atravesarla por ningún punto del dominio ni que hubiera "capas" de la superficie a diferentes niveles.

Si la gráfica de una función tiene un agujero, esta función no será continua en el punto en el que tiene dicho agujero. En ese caso, decimos que la función es discontinua en ese punto. Revisando nuestra notas de Cálculo I, podemos dar la siguiente definición de continuidad:

DEFINICION 10 (definición intuitiva de continuidad)

La función f se dice **CONTINUA EN** $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{D}_f$ si y solo si: si \mathbf{X} esta bien cerquita de \mathbf{X}_0 entonces $f(\mathbf{X})$ esta tan cerquita de $f(\mathbf{X}_0)$ como queramos.

DEFINICION 11 (continuidad en una bola)

La función f se dice CONTINUA EN UNA BOLA \mathbf{B} si es continua en cada punto de \mathbf{B} . f se dice CONTINUA si es continua en todos los puntos de su dominio.

Ahora extenderemos la noción de límite.

2.2 Definición de límite**DEFINICION 12 (definición intuitiva de límite)**

Dada la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida en una bola \mathbf{B} de centro \mathbf{X}_0 , excepto posiblemente en \mathbf{X}_0 mismo y $\mathbf{L} \in \mathbb{R}$, decimos que el LÍMITE DE f EN \mathbf{X}_0 es \mathbf{L} si \mathbf{L} es el valor al que nos acercamos con las imágenes cuando nos acercamos a \mathbf{X}_0 .

En ese caso, escribimos:

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = \mathbf{L}$$

En la anterior escritura, $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0$ se lee " \mathbf{X} tiende a \mathbf{X}_0 ". Es decir, $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = \mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{L}$

2.3 Propiedades de los límites

La anterior definición no nos dice como hallar un límite. El siguiente teorema nos proporciona un método para calcular límites de una amplia gama de funciones: las funciones continuas.

TEOREMA 1 (límites de funciones continuas)

La función f es continua en \mathbf{X}_0 si y solo si

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0)$$

Al igual que con las funciones de una variable, cuando se calcula un límite, se supone que la función es continua por lo que el límite se evalúa sustituyendo el punto en la regla de correspondencia y si la función no es continua, entonces quedara una indeterminación que debe analizarse caso por caso por lo que nos será de utilidad conocer algunas propiedades adicionales de los límites.

TEOREMA 2 (límite de funciones constantes)

Dada la función $f(\mathbf{X}) = c$, entonces

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = c$$

TEOREMA 3 (límite de funciones proyección)

Sea $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Dada la función proyección sobre la componente i -ésima $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, entonces

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = x_i^0$$

Observa que por el teorema 1 las funciones constantes y las funciones proyección son continuas.

TEOREMA 4 (operaciones con límites)

Dadas $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}) = \mathbf{L}$, $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} g(\mathbf{X}) = \mathbf{M}$, y h es continua en \mathbf{L} , entonces:

$$1) \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} (f \pm g)(\mathbf{X}) = \mathbf{L} \pm \mathbf{M}$$

$$2) \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} (f \cdot g)(\mathbf{X}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$$

$$3) \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} (f/g)(\mathbf{X}) = \mathbf{L}/\mathbf{M}$$

$$4) \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_0} (h \circ f)(\mathbf{X}) = h(\mathbf{L})$$

(es decir, el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de una resta es la resta de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites y el límite de una división es la división de los límites).

Para calcular límites de funciones de varias variables, puedes hacer lo siguiente: acercarte al punto X_0 por una dirección rectilínea indeterminada $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, y $z=z_0+ct$ (dos o tres ecuaciones según se trate de una función de dos o de tres variables), de esta manera, sustituyes el problema de determinar el límite de una función de varias variables por el problema de determinar el límite de una función de una sola variable t .

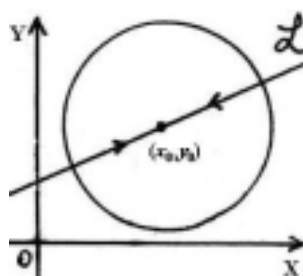


Figura 53

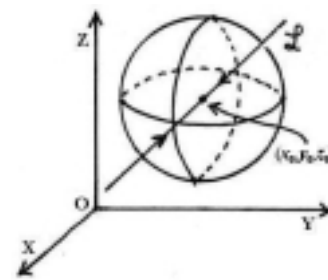


Figura 54

TEOREMA 5 (operaciones con funciones continuas)

Si $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en X_0 y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $f(X_0)$, entonces:

- | | |
|---|---------------------------------|
| 1) $(f \pm g)(X)$ es continua | 2) $(fg)(X)$ es continua |
| 3) $(f/g)(X)$ es continua donde $g(X) \neq 0$ | 4) $(h \circ f)(X)$ es continua |

COROLARIO 5.1 (continuidad de funciones polinomiales y racionales)

1) Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(X) = P(X)$ donde $P(X)$ es un polinomio en X , entonces f es continua.

2) Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ donde $P(X)$ y $Q(X)$ son polinomios en X , entonces f es continua en su dominio.

3. DERIVADAS PARCIALES

3.1 Introducción

Las curvas de nivel en los mapas topográficos se dibujan frecuentemente para cada **25m** de altura. Cuando están dibujadas muy juntas la altura cambia rápidamente al pasar de una curva de nivel a la siguiente; esto ocurre en la proximidad de un monte escarpado. Cuando las curvas de nivel están bastante separadas la altura varía despacio; esto ocurre por ejemplo en los llanos. Se puede tener una idea de lo escarpado de un terreno considerando lo espaciadas que están sus curvas de nivel. Sin embargo, para lograr una información precisa sobre el coeficiente de variación de la altura, se debe definir la superficie en términos de una función de dos variables a la que podamos aplicar los conceptos del Cálculo Diferencial.

Como veremos, la solución del problema anterior depende de la generalización de otro de los conceptos centrales del Cálculo de una variable: el concepto de derivada, que en aquel caso se refería a considerar la variación instantánea de las imágenes con respecto a los elementos del dominio: $f'(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (19)

Una generalización puramente analítica, conlleva sus dificultades, por ejemplo, estaríamos tentados a definir la derivada de una función f de varias variables tal como la definimos en Cálculo de una variable:

$$f'(X_0) = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0)}{X - X_0} \quad \text{ó} \quad f'(X_0) = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0)}{H}$$

pero en ambos casos las partes derechas de dichas igualdades no tienen sentido pues no tiene sentido dividir un número entre un vector por lo que debemos recurrir entonces a la interpretación geométrica de la derivada.

El límite (19) nos permite medir que tan rápido está cambiando la dirección de la gráfica de f a través de medir la variación en la pendiente de las tangentes a la gráfica. Mientras más pequeña es esta variación en las cercanías de un punto, más suave será la curva cerca de ese punto y mientras más grande sea la variación en las cercanías de un punto, la curva estará más curvada cerca de ese punto.

Para el caso de una función de dos variables, la gráfica de $z=f(x,y)$ es una superficie y el equivalente del problema anterior sería el de considerar que tan rápido cambian las alturas de la superficie en las cercanías de un punto $P=(x_0,y_0)$.

Naturalmente, y como ya lo comentamos en el punto anterior, el analizar si se esta cerca de un punto en el plano **XY** es mucho mas complejo que analizar si se esta cerca de un punto en la recta real, debido al problema de las direcciones, ya que no solo nos podemos acercar a un punto por una infinidad de direcciones rectilíneas sino que incluso lo podemos hacer siguiendo una trayectoria curva.

Entonces, dado el punto $P=(x_0,y_0)$ y su imagen $z=f(x_0,y_0)$, estaríamos interesados en analizar que tan rápido cambia z a medida que nos acercamos a P . Lo primero que debemos hacer para este análisis es elegir una dirección para acercarnos a P y naturalmente, consideraremos las direcciones mas sencillas que conocemos: la dirección del eje **X** y la del eje **Y**.

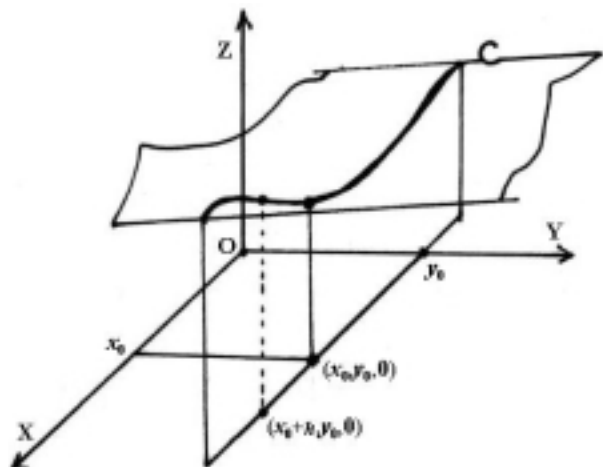


Figura 55

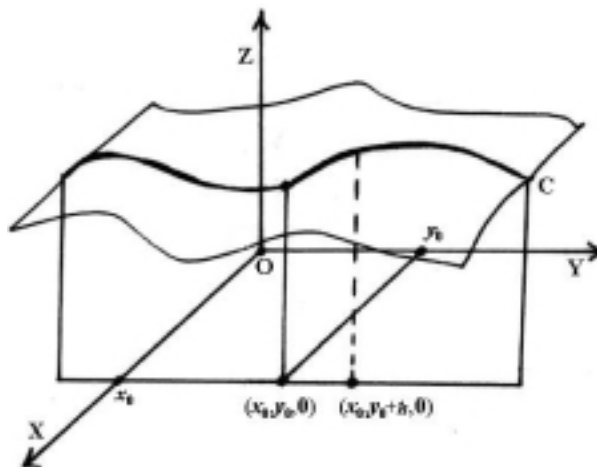


Figura 56

Con la elección anterior, estaríamos midiendo que tan rápido cambia la superficie en las cercanías de P cuando nos movemos en direcciones paralelas a los ejes. Si nos movemos en una dirección paralela al eje de las **X** (ve la Figura 55), entonces las y se mantienen constantes y viceversa si nos movemos en una dirección paralela al eje de las **Y** (Figura 56), entonces las x se mantienen constantes. La generalización del concepto de derivada para el caso de funciones de dos variables estará dada por la siguiente definición.

DEFINICION 13 (derivadas parciales)

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en una bola B con centro en (x_0, y_0) , la DERIVADA PARCIAL de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) y denotada por $f_x(x_0, y_0)$ se define como:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

análogamente, la DERIVADA PARCIAL de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) y denotada por $f_y(x_0, y_0)$ se define como:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

naturalmente, dichas definiciones tienen sentido en el caso de que los límites respectivos existan.

NOTAS SOBRE LA DEFINICIÓN 13

1) Las funciones $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ y $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$

se dicen DERIVADAS PARCIALES de f .

2) Si escribimos $z=f(x, y)$, entonces se acostumbra también denotar las derivadas parciales de f de la siguiente manera:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

3) Incluso puede ser que en algunos libros encuentres las siguientes notaciones:

$$f_x(x, y) = f_1(x, y) = D_1 f(x, y) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = f_2(x, y) = D_2 f(x, y)$$

4) El símbolo ∂ no es una letra griega sino que es un símbolo inventado en el siglo XIX para representar a este otro tipo de derivadas.

5) Al principio de la unidad mencionamos varios ejemplos de funciones de varias variables, entre ellos señalamos aquel que se refería a la temperatura $T(x, y, z)$ en un punto (x, y, z) de una placa de metal. En este caso estaríamos interesados en la variación de la temperatura cuando recorremos trayectoria paralelas a los ejes de coordenadas por lo que es conveniente generalizar el concepto de derivada parcial para el caso de una función de tres variables $w=f(x, y, z)$, la generalización se hace de una manera natural:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad f_y(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

6) Si en el ejemplo anterior consideramos también el tiempo, entonces estaríamos trabajando con la función $T(x, y, z, t)$ que nos daría la temperatura del punto (x, y, z) en el instante t por lo que incluso para un análisis de este tipo se debe trabajar con funciones de mas de tres variables por lo que nos conviene generalizar de una vez el concepto de derivada parcial para el caso de una función de n variables $u=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, también la generalización se hace de una manera natural, se varía una sola de las variables mientras que las demás se mantienen constantes:

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

7) Para diferenciar este nuevo tipo de derivada, a las derivadas de Cálculo I les llamaremos derivadas ordinarias.

8) Calcular una derivada parcial no es más difícil que calcular una derivada ordinaria, basta considerar a todas las variables con respecto a las que no se está derivando como constantes.

9) Observa que la derivada parcial de una función en un punto al ser un límite, no siempre existe. Geométricamente, al igual que en Cálculo I, la parcial no existe en los puntos donde hay un cambio brusco de dirección al acercarnos a esos puntos por trayectorias paralelas a los ejes eso se refleja en la gráfica de la función por que en esos puntos habrá picos o pliegues.

10) Dada la función $z=f(x, y)$, si consideramos la curva C_1 intersección del plano $y=y_0$ con la gráfica de z entonces el vector $i + f_x(x_0, y_0)k$ es tangente a la curva C_1 en el punto (x_0, y_0) . Análogamente, si C_2 es la curva de intersección del plano $x=x_0$ con la gráfica de z entonces el vector $j + f_y(x_0, y_0)k$ es tangente a la curva C_2 en el punto (x_0, y_0) .

Las reglas de derivación para funciones de varias variables son análogas a las relativas para funciones ordinarias como lo señala el siguiente teorema.

TEOREMA 6 (fórmulas de derivación para derivadas parciales)

Dadas $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f y g tienen derivadas parciales, entonces:

$$1) (f \pm g)_x = f_x \pm g_x \quad \text{y} \quad (f \pm g)_y = f_y \pm g_y$$

$$2) (fg)_x = f g_x + g f_x \quad \text{y} \quad (fg)_y = f g_y + g f_y$$

$$3) \left(\frac{f}{g} \right)_x = \frac{g f_x - f g_x}{g^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{f}{g} \right)_y = \frac{g f_y - f g_y}{g^2}$$

3.2 Derivadas parciales de orden superior

Una función de una variable, puede tener segunda, tercera y mayores derivadas, sucede lo mismo con funciones de varias variables. Si tenemos una función $f(x,y)$, entonces las funciones $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ pueden tener cada una dos derivadas parciales, en este caso, f_x y f_y generarían a cuatro nuevas derivadas parciales por lo que podemos dar la siguiente definición:

DEFINICION 14 (segundas derivadas parciales)


Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definimos sus SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES a las funciones: $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, usualmente denotadas por:

$$1) (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad 2) (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad 3) (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad 4) (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

NOTAS SOBRE LA DEFINICIÓN 14

1) f_x y f_y se dicen primeras derivadas parciales (ó simplemente primeras parciales) [ó más simplemente parciales].

2) f_{xy} y f_{yx} se dicen derivadas parciales mixtas (ó simplemente parciales mixtas)

3)  !Atención!, observa que el orden en el que x y y aparecen en la notación f_{xy} es opuesto al que se escribe en la notación $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

4) Para funciones del tipo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ al hablar de segundas derivadas parciales, estaríamos hablando de las siguientes derivadas: f_{xx} , f_{yy} , f_{zz} , f_{xy} , f_{yx} , f_{xz} , f_{zx} , f_{yz} y f_{zy} .

5) Para funciones f de tres variables, podríamos pensar en derivadas del tipo f_{xyz} aunque esas serían ya derivadas parciales de tercer orden

De nuestros ejemplos anteriores podemos notar que a veces las parciales mixtas coinciden y a veces no. La mayor parte de las funciones con las que trabajaremos caen en el primer caso (lo que reduce el trabajo de cómputo), gracias al siguiente teorema.

TEOREMA 7 (parciales de funciones continuas)

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si f_{xy} y f_{yx} son continuas en el punto (x_0, y_0) , entonces: $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

Para el caso de funciones $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, si f_{xy} , f_{yx} , f_{xz} , f_{zx} , f_{yz} y f_{zy} son continuas en el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces:

$$f_{xy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yx}(x_0, y_0, z_0) \quad f_{xz}(x_0, y_0, z_0) = f_{zx}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad f_{yz}(x_0, y_0, z_0) = f_{zy}(x_0, y_0, z_0)$$

DEFINICION 15 (diferenciabilidad)

Una función de varias variables se dice DIFERENCIABLE si y sólo si sus parciales mixtas son iguales.

3.3 Regla de la cadena

Seguramente recordarás que la regla de la cadena se refiere a la derivación de funciones compuestas, si no lo recuerdas aquí está de nuevo: Si f y g son derivables, entonces $g \circ f$ es derivable y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$

usando la notación de Leibniz con $y=f(x)$ y $z=g(y)$, esta formula se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Para el caso de composición de funciones de varias variables debemos tener en cuenta que estas se pueden componer con funciones ordinarias y con funciones vectoriales por lo que a la hora de derivar aparecerán derivadas ordinarias y derivadas parciales, por otra parte hay que tomar en cuenta que como existen diferentes composiciones posibles, entonces para el caso de funciones de varias variables habrá varias versiones de la regla de la cadena, en el siguiente teorema damos cuatro versiones, dos relativas a funciones de dos variables y dos relativas a funciones de tres variables.

TEOREMA 8 (regla de la cadena)

1) Dadas $z=f(x,y)$, $x=g_1(t)$ y $y=g_2(t)$, entonces $z(t)=f(g_1(t), g_2(t))$, es decir, z es una función del tipo $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ y en ese caso:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

2) Dadas $w=f(x,y,z)$, $x=g_1(t)$, $y=g_2(t)$ y $z=g_3(t)$, entonces $w(t)=f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ es decir, w es una función del tipo $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ y en ese caso:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

3) Dadas $z=f(x,y)$, $x=g_1(u,v)$ y $y=g_2(u,v)$, entonces $z(u,v)=f(g_1(u,v), g_2(u,v))$, es decir, z es una función del tipo $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ y en ese caso:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

4) Dadas $w=f(x,y,z)$, $x=g_1(u,v)$, $y=g_2(u,v)$ y $z=g_3(u,v)$, entonces $w(u,v)=f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))$, es decir, w es una función del tipo $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ y en ese caso:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

De cualquier manera, lo mas cómodo para derivar funciones compuestas es primero hacer la composición y luego derivar.

La regla de la cadena para funciones de varias variables, es particularmente útil en problemas relativos a razones de cambio.

Por otra parte, nos sirve también para simplificar el proceso de derivación implícita. Si por ejemplo tenemos una función implícita $y(x)$, escribimos la función en la forma $\mathbf{F}(x,y)=0$ (es decir, “pasamos” todo al lado izquierdo de la ecuación) y entonces tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$$

4. DERIVADAS DIRECCIONALES

En este punto, retomamos el problema de analizar el comportamiento de la gráfica de una función de dos variables pero ahora aproximándonos a un punto por direcciones diferentes a las de los ejes de coordenadas. Naturalmente, trataremos de utilizar lo más posible nuestro conocimiento sobre las derivadas parciales y la idea central es la de descomponer un vector de dirección en términos de los versores unitarios i y j , con esta idea veremos como es posible descomponer derivadas en otras direcciones en términos de las parciales.

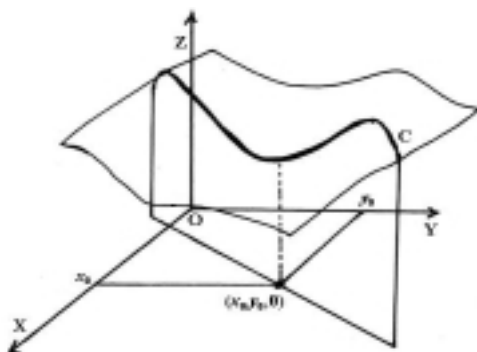


Figura 57

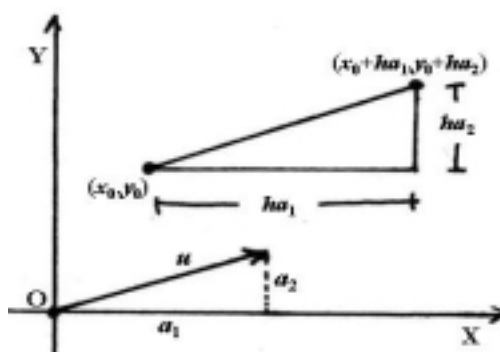


Figura 58

Después de nuestro análisis, podemos dar la siguiente definición:

DEFINICION 16 (derivadas direccionales)

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en una bola \mathbf{B} con centro en (x_0, y_0) y $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ un vector unitario cualquiera, la DERIVADA DIRECCIONAL de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección de \mathbf{u} y denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ se define como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

en el caso de que el límite exista.

En la definición anterior, observa que si $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f = f_x$ y que si $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f = f_y$.

La definición habla de un vector unitario por lo que si \mathbf{u} no lo es, lo hacemos (dividiendo entre su norma). El siguiente teorema nos proporciona un método para evaluar derivadas direccionales.

TEOREMA 9 (para hallar derivadas direccionales)

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si f es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces f tiene derivadas direccionales en (x_0, y_0) en cualquier dirección. Es mas, si $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) a_1 + f_y(x_0, y_0) a_2$$

en vista de lo anterior, cualquier derivada direccional puede ser evaluada por medio de dos parciales.

Para definir el concepto de derivada direccional en el caso de funciones de tres variables solo debemos hacer los ajustes necesarios.

DEFINICION 17 (derivadas direccionales para funciones de tres variables)

Dada $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en una bola \mathbf{B} con centro en (x_0, y_0, z_0) y $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ un vector unitario cualquiera, la DERIVADA DIRECCIONAL de f en el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección de \mathbf{u} y denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ se define como:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, z_0 + ha_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

en el caso de que el límite exista.

TEOREMA 10 (para hallar derivadas direccionales)

Dada $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , entonces f tiene derivadas direccionales en (x_0, y_0, z_0) en cualquier dirección. Es mas, si $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) a_1 + f_y(x_0, y_0, z_0) a_2 + f_z(x_0, y_0, z_0) a_3$$

Las definiciones anteriores se extienden de manera natural a funciones de mas variables.

5. GRADIENTE Y PLANO TANGENTE

5.1 Gradiente

El gradiente es un vector definido por medio de las primeras parciales. Este vector es importante en el análisis de las derivadas direccionales, juega un papel importante en la definición del plano tangente a una superficie y tiene una especial importancia en aplicaciones físicas.

DEFINICION 18 (gradiente)

a) Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con derivadas parciales en (x_0, y_0) , el GRADIENTE de f en (x_0, y_0) es el vector definido por:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j} = (f_x, f_y)$$

b) Para el caso de funciones $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con derivadas parciales en (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (f_x, f_y, f_z) = f_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}$$

La definición anterior se extiende de manera natural a funciones de mas variables. El símbolo ∇ se llama "del" y se trata de una delta invertida.

Desde el momento en que dimos la definición de gradiente, notaste la similitud con las derivadas direccionales, de hecho, hay relaciones muy estrechas entre estos dos conceptos, dadas por los siguientes teoremas, el primero de ellos nos proporciona una forma fácil de obtener derivadas direccionales.

TEOREMA 11 (derivadas direccionales y gradiente)

a) Dado $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ un vector unitario, entonces $\nabla f \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}$

b) Dado $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ un vector unitario, entonces $\nabla f \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}$

COROLARIO 11.1 Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} = 0 \forall \mathbf{u}$

COROLARIO 11.2 Si θ es el ángulo formado por ∇f y \mathbf{u} , entonces $D_{\mathbf{u}} = \|\text{grad } f\| \cos \theta$

Si pensamos a $D_{\mathbf{u}}$ como una función de \mathbf{u} y $\text{grad } f \neq \mathbf{0}$, del corolario anterior, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}}$ se obtiene cuando $\theta = 0$ o sea cuando \mathbf{u} y $\text{grad } f$ tienen la misma dirección y en ese caso $D_{\mathbf{u}} = \|\text{grad } f\|$, mientras que el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}$ se obtiene cuando $\theta = \pi$ o sea cuando \mathbf{u} y $\text{grad } f$ tienen direcciones opuestas y en ese caso $D_{\mathbf{u}} = -\|\text{grad } f\|$. En el caso que ∇f y \mathbf{u} sean perpendiculares entonces se tiene que $D_{\mathbf{u}} = 0$.

De las observaciones anteriores, podemos concluir que dada la función f y el punto (x_0, y_0) , f aumenta más rápidamente en la dirección del gradiente. Si G es la gráfica de f y G fuera la superficie de una montaña, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ el declive mas empinado se daría en la dirección de $\text{grad } f$ y el menos empinado en la dirección perpendicular a $\text{grad } f$. Lo mismo sucede para funciones de más variables aunque, naturalmente, ya no podemos dar una interpretación geométrica.

En la siguientes figuras se muestra una función y su "campo de gradientes", en esta última representación bidimensional cada vector representa en cada punto la dirección en la que $f(x, y)$ tiene su crecimiento máximo, la longitud de cada flecha representa la magnitud del crecimiento.