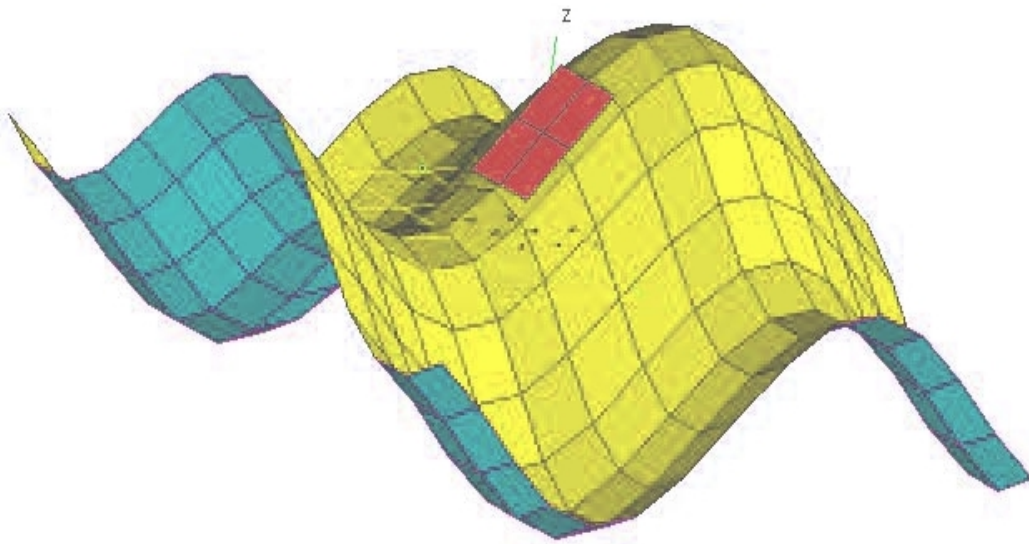


# Unidad 3:



## Funciones de varias variables

# INDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.....	1
1.1 Funciones de varias variables .....	1
1.2 Dominio .....	2
1.3 Operaciones .....	3
1.4 Gráficas.....	4
1.4.1 Curvas de nivel y trazas.....	4
1.4.2 Superficies de nivel.....	8
1.5 superficies cuadráticas .....	9
2. LIMITES Y CONTINUIDAD.....	14
2.1 Definición de continuidad.....	14
2.2 Definición de limite .....	15
2.3 Propiedades de los limites.....	15
3. DERIVADAS PARCIALES.....	16
3.1 Introducción.....	16
3.2 Derivadas parciales de orden superior .....	19
3.3 Regla de la cadena .....	19
4. DERIVADAS DIRECCIONALES.....	20
5. GRADIENTE Y PLANO TANGENTE .....	22
5.1 Gradiente.....	22
5.2 Plano tangente.....	23
6. VALORES EXTREMOS.....	24
6.1 Valores extremos .....	24
6.2 Multiplicadores de Lagrange .....	26

## Unidad 3: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

### INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado funciones de una sola variable (con valores reales y con valores vectoriales) y muchos fenómenos del mundo físico se pueden describir mediante tales funciones, pero en la mayoría de los fenómenos intervienen muchas variables relacionadas entre sí y el valor de una de ellas depende de las otras. De hecho en tu curso de Cálculo I muchas veces se tuvo que hacer una sobre simplificación de los problemas de tal manera que pudieras utilizar las herramientas que se te proporcionaron en dicho curso.

Por ejemplo, el volumen de una caja rectangular depende de su longitud, de su ancho y de su altura; la temperatura en un punto de una placa de metal depende de las coordenadas de ese punto y posiblemente también del tiempo; el costo de impermeabilización de un techo depende del área por impermeabilizar y del espesor de la capa. Cualquier cantidad que dependa de otras cantidades puede ser pensada como una función de varias variables. En esta unidad extenderemos el concepto de diferenciación para este tipo de funciones y en la próxima unidad haremos lo mismo con el concepto de integración.

### 1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

#### 1.1 Funciones de varias variables

Una función vectorial es una función del tipo:

$$\mathbf{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es decir, a una sola variable le asigna un vector, las funciones de varias variables, hacen lo contrario: a un vector le asignan un número real por lo que podemos dar la siguiente definición:

**DEFINICION 1 (función de varias variables)**

Una FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES es una función del tipo:

en ese caso escribimos  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow y$$

Los siguientes ejemplos se refieren a algunas funciones concretas de este tipo.

1) El área de un rectángulo de lados  $x$  y  $y$  está dada por

$$A(x, y) = xy \quad (1)$$

2) El volumen de un paralelepípedo rectangular de lados  $x$ ,  $y$  y  $z$  está dada por

$$V(x, y, z) = xyz \quad (2)$$

3) La superficie de un paralelepípedo rectangular de lados  $x$ ,  $y$  y  $z$  está dada por

$$S(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz \quad (3)$$

4) La magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por el sol (situado en el origen, como se muestra en la figura de la derecha) sobre una masa situada en el punto  $(x, y, z)$  está dada por:

$$F(x, y, z) = \frac{c}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

donde  $c$  es una constante positiva.

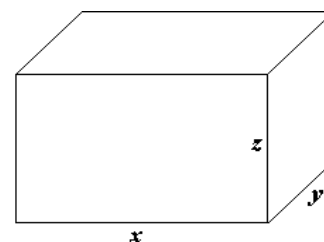


Figura 1: paralelepípedo

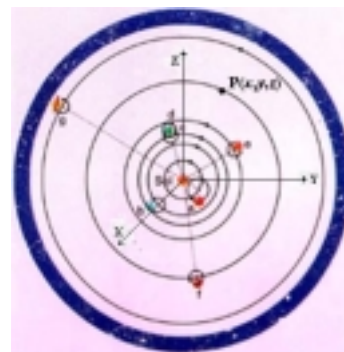


Figura 2

5) La magnitud de la fuerza de un campo eléctrico situado en el punto  $(x,y,z)$  y debida a un alambre de longitud infinita situado a lo largo del eje  $Z$ , está dada por (donde  $c$  es una constante):

$$F(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5)$$

6) El porcentaje de sangre que fluye a través del pulmón derecho está dado por (donde  $a$  y  $b$  son constantes):

$$f(x, y) = \frac{100ax}{ax + by} \quad (6)$$

Para este nuevo tipo de funciones repetiremos el análisis hecho para las funciones de una variable: efectuaremos operaciones con ellas, las graficaremos y daremos sentido a la continuidad, a los límites, a la derivada y a la integral y sus respectivas interpretaciones para poderlas aplicar a problemas que dependen de varias variables. Al igual que en la unidad anterior, nos concentraremos en casos particulares de funciones de este tipo, que en este caso serán de la forma:  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , y  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  de las que podemos tener una interpretación geométrica, funciones de más variables deben analizarse por entero con medios exclusivamente analíticos.

Para diferenciar las nuevas funciones de las de Cálculo I, a las primeras les llamaremos "funciones de una variable", y de hoy en adelante en esta unidad, cuando digamos función, debes entender que se trata de una función de varias variables, a menos que se especifique lo contrario.

## 1.2 Dominio

Al igual que con las funciones de una variable, nuestro nuevo tipo de funciones están definidas sólo para ciertos valores de las variables independientes. Para funciones del tipo  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  el dominio es un subconjunto de  $\mathbf{R}^2$ , mientras que para funciones del tipo  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  el dominio es un subconjunto de  $\mathbf{R}^3$ .

### DEFINICION 2 (dominio natural)

Dada una función de dos variables, su **DOMINIO (natural)** es la región del plano para la que la regla de correspondencia tiene sentido en  $\mathbf{R}$ , análogamente, el dominio natural de una función de tres variables es la región del espacio para la que la regla de correspondencia tiene sentido en  $\mathbf{R}$ .

Al igual que en Cálculo I, el dominio natural puede estar restringido por condiciones físicas.

Consideremos las siguientes funciones y determinemos su dominio:

$$\begin{array}{lll} (7) h(x,y) = \sqrt{2x-3y+4} & (8) f(x,y) = \ln(4x+y-5) & (9) g(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) \\ (10) \phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} & (11) \alpha(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2x-3y+4z-6}} & (12) \mu(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2) \end{array}$$

Podemos hacer una representación gráfica de dicho dominio y observamos que para la función  $h$  se trata del semiplano inferior determinado por la recta  $2x-3y+4=0$  incluyendo los puntos de la recta (ve la Figura 3).

En el caso de  $f$  se trata del semiplano superior determinado por la recta  $4x+y-5=0$  sin incluir los puntos de la recta (ve la Figura 4).

El dominio de  $g$  consta del interior de la circunferencia  $x^2+y^2=1$  sin incluir la frontera (ve la Figura 5).

El dominio de  $\phi$  son todos los puntos del plano externos a la circunferencia  $x^2+y^2=4$  incluyendo los puntos de la circunferencia (ve la Figura 6).

El dominio de  $D_\alpha$  es la región del espacio determinada por el plano  $2x-3y+4z=6$  que queda del otro lado del origen sin incluir los puntos del plano (ve la Figura 7).

Y finalmente  $D_\mu$  es el interior de la esfera con centro en el origen y radio 4 sin incluir los puntos de la esfera.

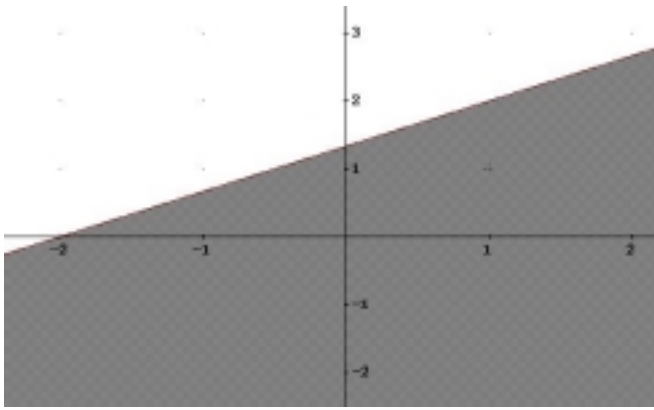


Figura 3

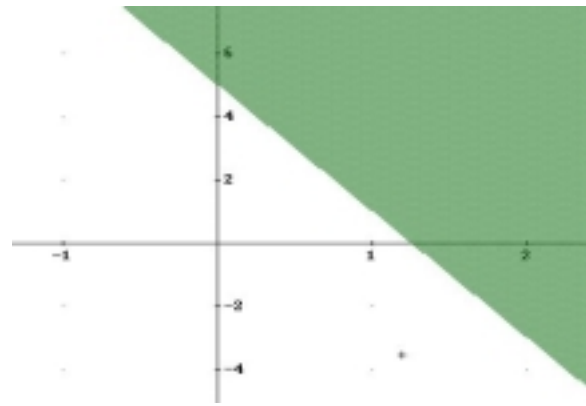


Figura 4

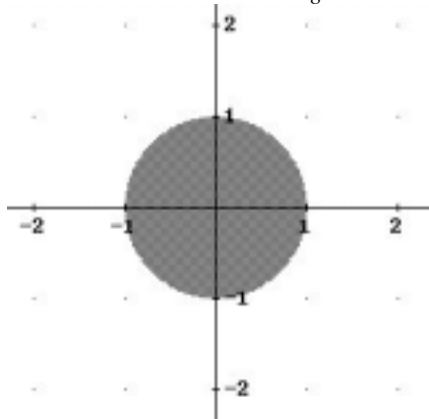


Figura 5

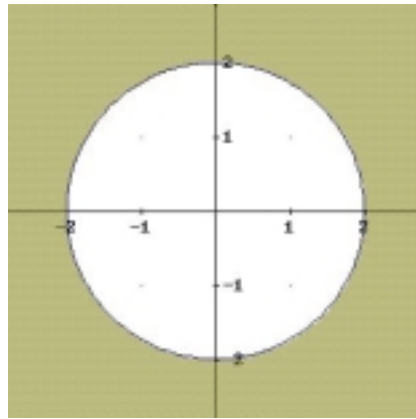


Figura 6

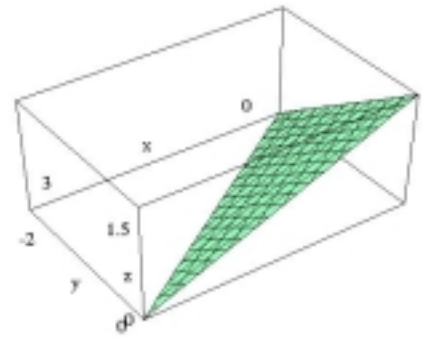


Figura 7

### 1.3 Operaciones

Las operaciones con funciones de varias variables se definen exactamente como lo esperaríamos:

#### DEFINICION 3 (operaciones con funciones)

Dadas  $f$  y  $g$  funciones de varias variables,  $F$  una función vectorial,  $h$  una función de una variable,  $X \in \mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}$ , definimos las siguientes operaciones entre ellas:

- |                             |                               |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $(f+g)(X) = f(X) + g(X)$ | 2) $(f-g)(X) = f(X) - g(X)$   | 3) $(fg)(X) = f(X)g(X)$       |
| 4) $(f/g)(X) = f(X) / g(X)$ | 5) $(h \circ f)(X) = h(f(X))$ | 6) $(f \circ F)(t) = f(F(t))$ |
|                             |                               | 7) $(F \circ f)(X) = F(f(X))$ |

Observa que las primeras cinco funciones son del tipo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que la sexta es del tipo  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y la última es del tipo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Este último tipo de funciones se estudiarán más adelante pues son cualitativamente diferentes de las que veremos en esta unidad.

En la siguiente definición se caracterizan algunas funciones con las que más frecuentemente nos encontraremos.

#### DEFINICION 4 (funciones polinomiales y racionales)

Una función de dos variables  $x$  y  $y$  es una función POLINOMIAL si es una suma de funciones del tipo  $cx^m y^n$  ( $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ) y se dice RACIONAL si es el cociente de dos funciones polinomiales.

## 1.4 Gráficas

Apenas se necesita recordar que en Cálculo I y en la unidad pasada, se definió la gráfica de una función  $f$  como el conjunto  $G=\{(x, f(x))/ x \in D_f\}$ , es decir, el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyas primeras componentes son los elementos del dominio y cuyas segundas componentes son las respectivas imágenes. Para una función de varias variables podemos definir su gráfica de la misma manera:

### DEFINICION 5 (gráfica de una función)

Dada la función  $f$  y  $X \in \mathbb{R}^n$ , la gráfica de  $f$  es el conjunto  $G=\{(X, f(X))/ X \in D_f\}$

Para una función real  $G \subset \mathbb{R}^2$ , pero para una función de varias variables:

Si  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , entonces  $G \subset \mathbb{R}^3$ , por lo que la gráfica de una función de dos variables está en el espacio (ve la gráfica de la derecha), mientras que si  $D_f \subset \mathbb{R}^3$ , entonces  $G \subset \mathbb{R}^4$  por lo que ya no podemos dibujar su gráfica aunque más adelante veremos la manera de hacernos una idea del comportamiento de la función graficando superficies asociadas a la gráfica.

El problema de dibujar la gráfica de una función de varias variables es complejo y como era de esperarse, lo abordaremos usando la computadora aunque es conveniente recordar algunas propiedades analíticas de estas gráficas para hacernos una idea de su comportamiento y poder hacer un esbozo.

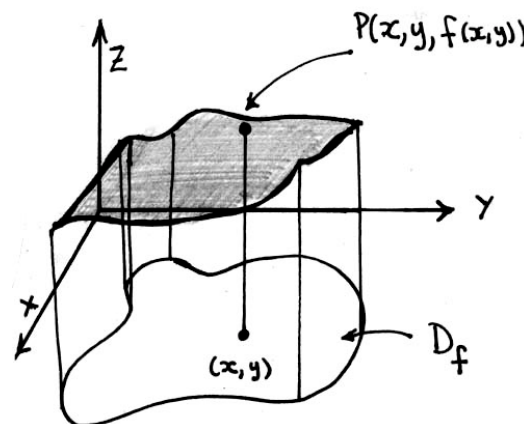


Figura 8: gráfica de una función

Para funciones de dos variables, el proceso de graficación es similar al usado para las funciones reales: se van tomando diferentes elementos del dominio y obtenemos su imagen, sólo que ahora los puntos de la forma  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  deben unirse no mediante una curva sino mediante una superficie.

### 1.4.1 Curvas de nivel y trazas

Como no es sencillo graficar una función de dos variables ya que su gráfica es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , pueden usarse conjuntos bidimensionales para obtener información tridimensional a través de los conceptos de trazas y de curvas de nivel.

#### DEFINICION 6 (traza)

Dada una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  y un plano  $P$  cualquiera, la TRAZA de  $S$  determinada por  $P$  se define como la curva obtenida de  $S \cap P$ .

Las trazas más utilizadas además de las curvas de nivel (ver la siguiente definición) para el análisis de una superficie son los planos coordenados  $x=0$  y  $y=0$  ó planos paralelos a ellos  $x=c$  y  $y=c$ . Incluso algunas de estas trazas reciben un nombre particular como se señala en la siguiente definición.

#### DEFINICION 7 (curvas de nivel)

Dada la función  $z=f(x,y)$ , sus CURVAS DE NIVEL se definen como las proyecciones en el plano  $XY$  de los conjuntos

$$C=\{(x,y)/ f(x,y)=c\}$$

en donde  $c$  es una constante.

A continuación se presentan algunas superficies en donde se han evidenciado algunas trazas.

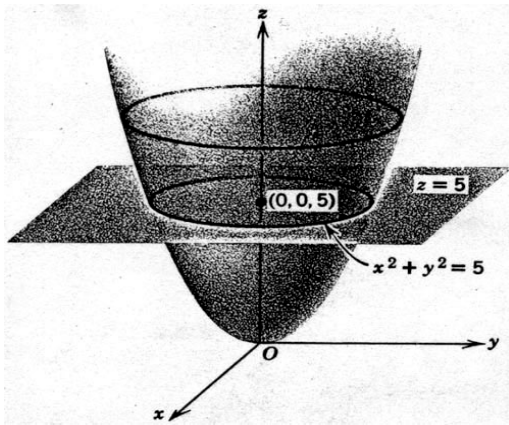


Figura 9: Trazas correspondiente a  $z=5$  en el paraboloide  $z=x^2+y^2$ .

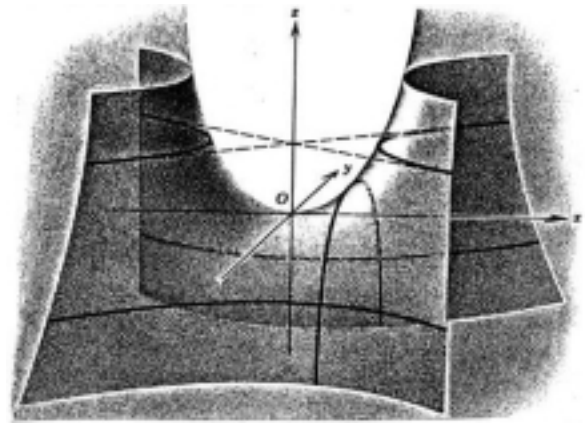


Figura 10: Algunas trazas de un paraboloide hiperbólico.

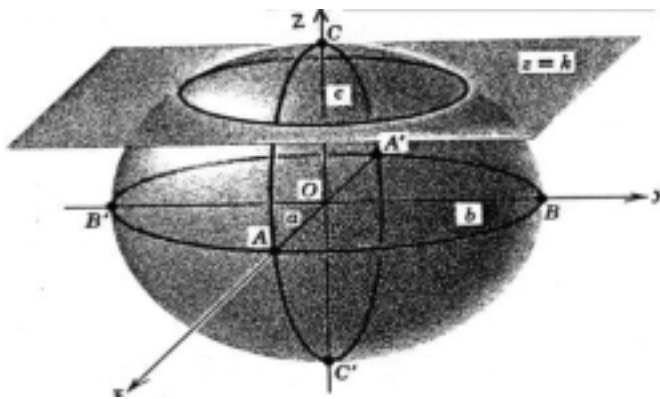


Figura 11: Algunas trazas de un elipsoide.

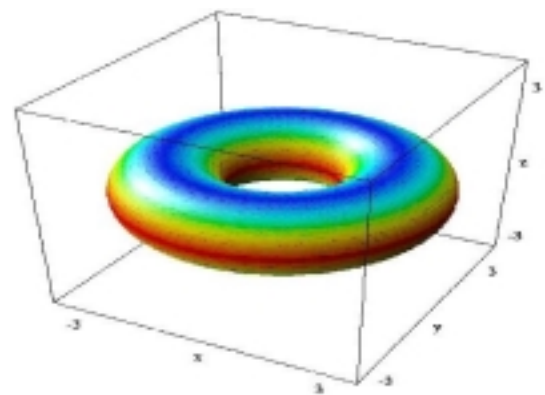


Figura 12: Toro de ecuación  $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1$

Del Toro de ecuación  $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1$  se presentan las siguientes trazas (Gráficas del toro y de sus trazas generadas con *DPGraph*):

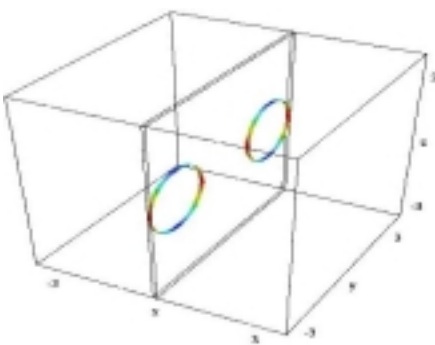


Figura 13: Trazas con  $x=0$

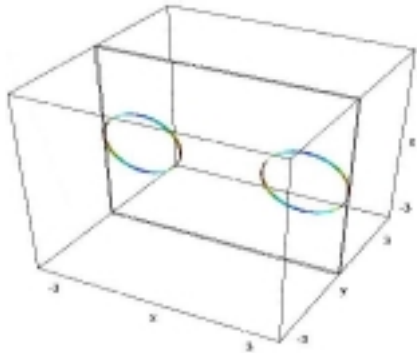


Figura 14: Trazas con  $y=0$

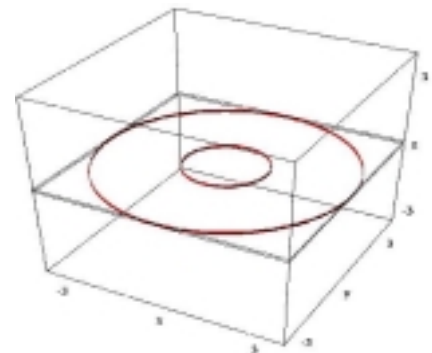


Figura 15: Trazas con  $z=0$

El concepto de **curva de nivel** es un concepto sumamente utilizado en topografía para hacer en mapas representaciones planas de regiones geográficas, por ejemplo, en la siguiente figura se representa a la izquierda un paisaje montañoso mientras que a la derecha se presenta una representación plana de una región, a cada zona de color le corresponde una cierta altura mientras que las curvas frontera entre zona y zona corresponden a una misma altura (ve las siguientes figuras).





Figura 16: Fotografía de una región natural.

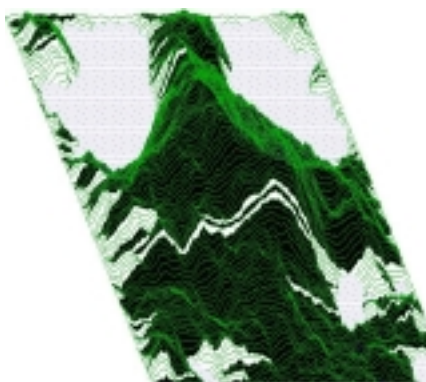


Figura 17: Representación tridimensional de una región (gráfica generada con 3Dfrac).

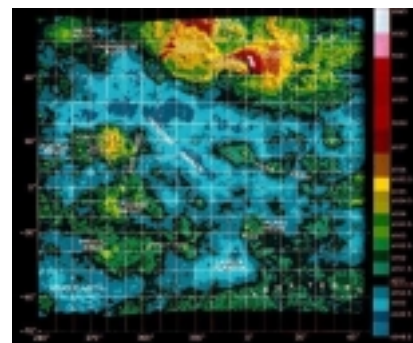


Figura 18: Representación bidimensional de una región tridimensional (la escala de alturas se halla a la derecha).

A continuación se presentan algunas superficies matemáticas con sus respectivas curvas de nivel (gráficos generados con *Matlab*).

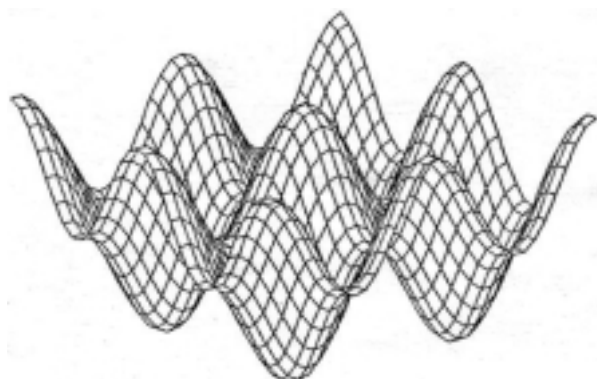


Figura 19: Gráfica de la función  $f(x,y)=\cos x+\cos y$  con  $x,y \in [-6.5, 6.5]$

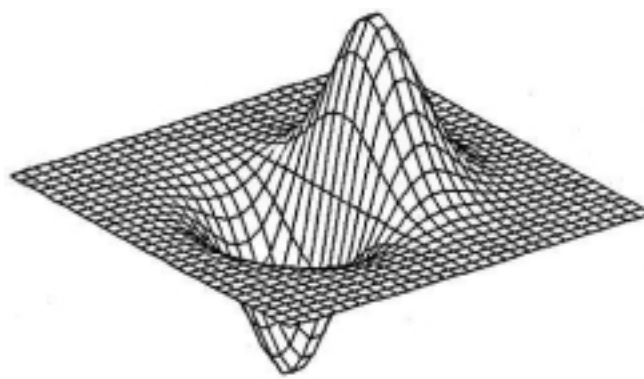


Figura 20: Gráfica de la función  $f(x,y)=x e^{-x^2-y^2}$  con  $x,y \in [-3, 3]$

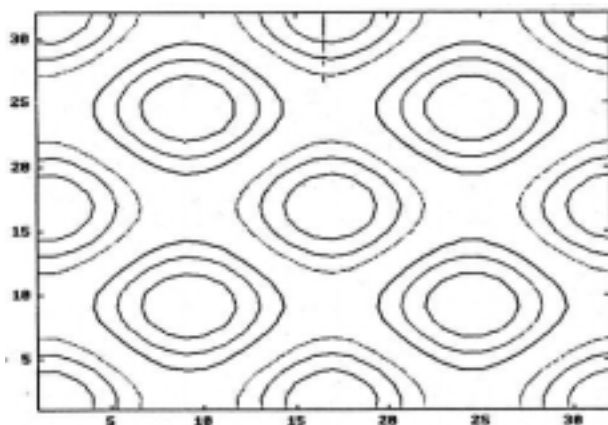


Figura 21: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=\cos x+\cos y$

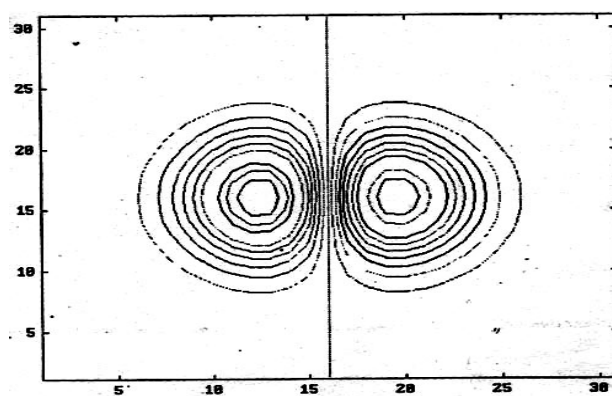


Figura 22: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=-x e^{-x^2-y^2}$

Las siguientes dos gráficas de la columna de la izquierda fueron generadas con *Matlab*, la tercera con *DGGraph*, todas las de la columna de la derecha fueron generadas con *Maple*.



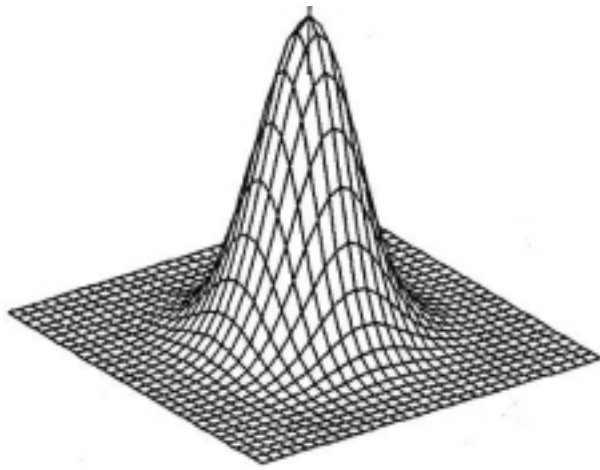


Figura 23: Gráfica de la función  $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$  con  $x,y \in [-3,3]$

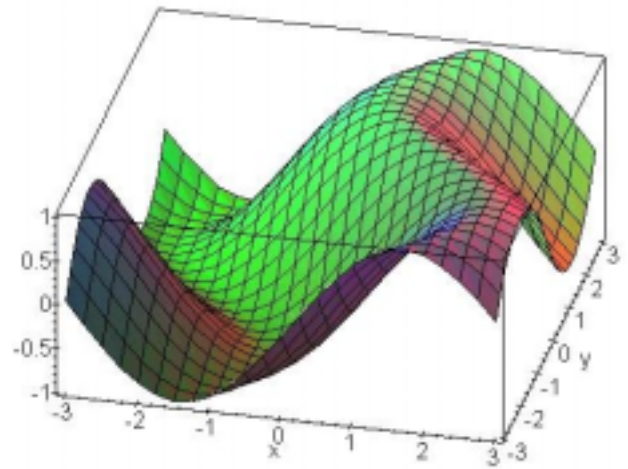


Figura 24: Gráfica de la función  $f(x,y)=\text{sen}(x+\text{sen}y)$  con  $x,y \in [-3,3]$

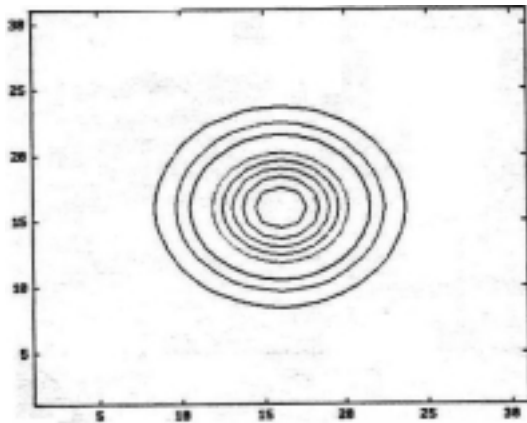


Figura 25: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$

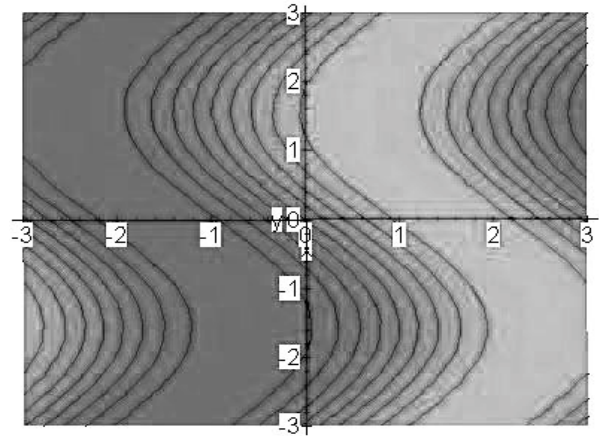


Figura 26: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=\text{sen}(x+\text{sen}y)$

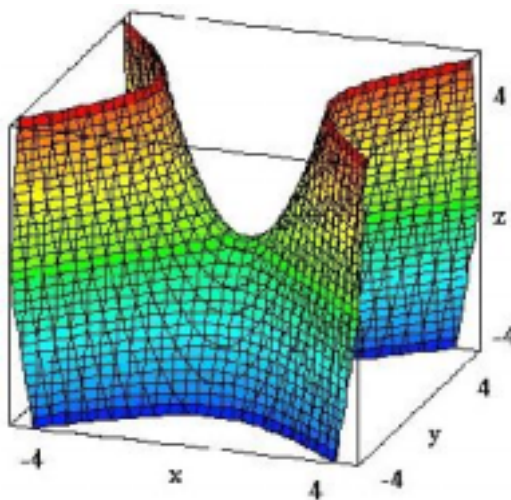


Figura 27: Gráfica de la función  $f(x,y)=x^2-y^2$  con  $x,y \in [-4,4]$

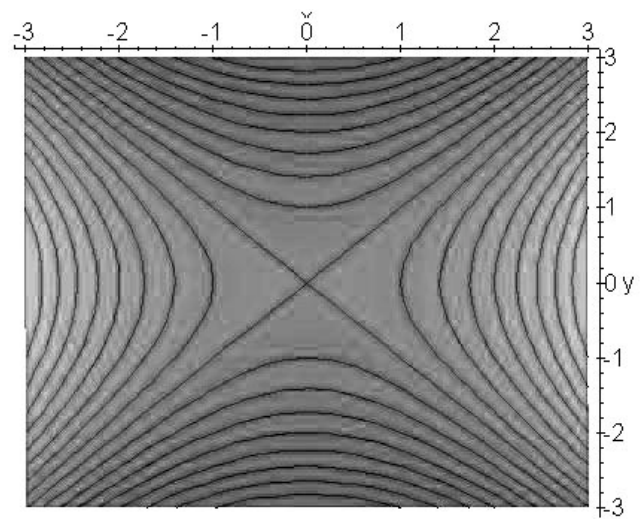


Figura 28: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=x^2-y^2$

Las siguientes dos gráficas fueron generadas con *DPGraph*, las demás con *Matlab*.

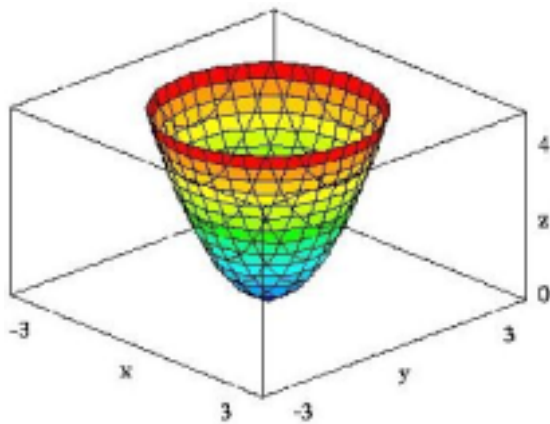


Figura 29: Gráfica de la función  $f(x,y)=x^2+y^2$  con  $x,y \in [-5,5]$

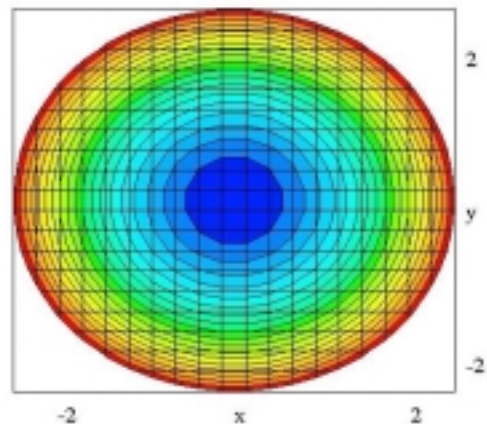


Figura 30: Curvas de nivel de la función  $f(x,y)=x^2+y^2$

Observa que los conjuntos definidos son las trazas que se obtienen cortando a la superficie con planos paralelos al plano **XY** (planos de la forma  $z=c$ ) y determinan curvas sobre la superficie que tienen una altura constante, además una superficie tiene un número infinito de curvas de nivel por lo que en la práctica sólo se toman algunas que sean representativas.

El concepto de curva de nivel es muy utilizado en diferentes áreas del conocimiento, una de las principales es la elaboración de mapas topográficos.

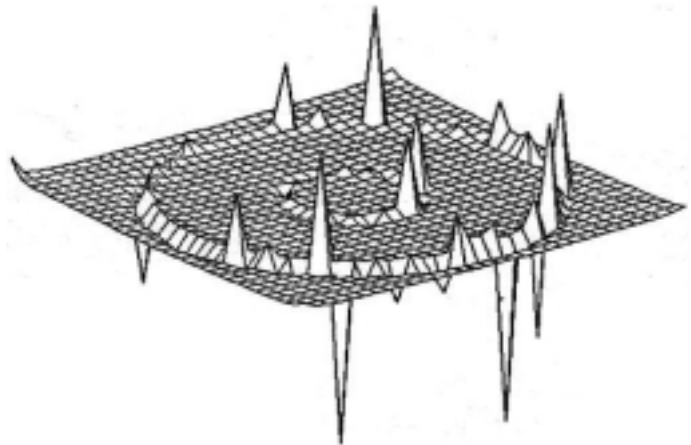


Figura 31: Gráfica de  $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \tan \sqrt{x^2+y^2}$  con  $x,y \in [-5,5]$

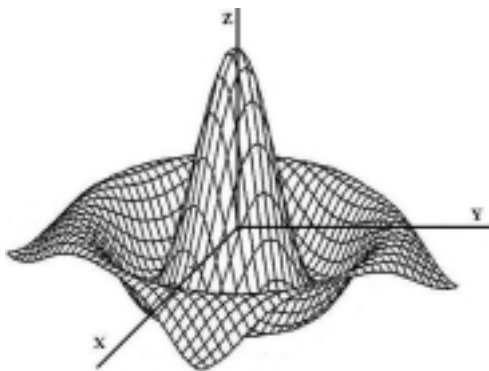


Figura 32: Gráfica de  $f(x,y)=\frac{\text{sen} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$  con  $x,y \in [-8,8]$

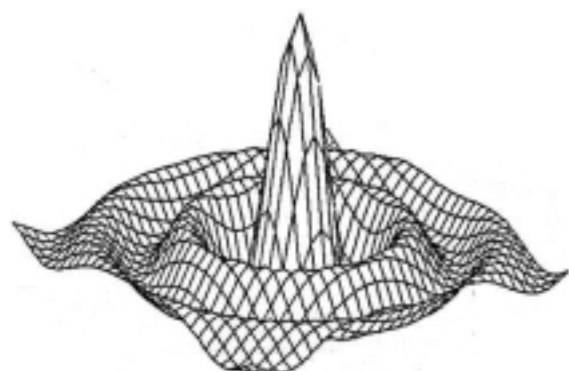


Figura 33: Gráfica de  $f(x,y)=\frac{\text{sen} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$  con  $x,y \in [-14,14]$

### 1.4.2 Superficies de nivel

Para el caso de funciones de tres variables, como ya lo comentamos, es imposible hacer su gráfica por lo que siguiendo la idea anterior buscamos obtener información de un conjunto tetradimensional a partir de conjuntos tridimensionales: las superficies de nivel, que son una generalización de las curvas de nivel por lo que podemos dar la siguiente definición:

**DEFINICION 8 (superficies de nivel)**

Dada la función  $w=f(x,y,z)$ , sus SUPERFICIES DE NIVEL se definen como los conjuntos

$$S=\{(x,y,z)/f(x,y,z)=c\}$$

Observa que los conjuntos definidos son superficies y al igual que para las curvas de nivel, una función de tres variables tiene un número infinito de superficies de nivel por lo que en la práctica (otra vez) sólo se toman algunas que sean representativas.

Así como las curvas de nivel sirven para señalar los puntos con la misma altitud, misma presión, etc., las superficies de nivel también tienen aplicaciones físicas.

Por ejemplo, si  $V(x,y,z)$  representa el voltaje (o potencial) de un campo eléctrico en el punto  $(x,y,z)$ , entonces las superficies de nivel  $V(x,y,z)=c$  se dicen superficies equipotenciales y representan a todos los puntos en el espacio con el mismo potencial.

Si  $T(x,y,z)$  representa la temperatura en el punto  $(x,y,z)$ , entonces las superficies de nivel  $T(x,y,z)=c$  se dicen superficies isotérmicas y representan a todos los puntos en el espacio con la misma temperatura. Por ejemplo, los siguientes diagramas muestran las zonas con la misma temperatura en el fuselaje de un transbordador espacial.

Este tipo de estudios son útiles para decidir el tipo de material a usar en la construcción del fuselaje, por ejemplo, se hace necesario el uso de carbono reforzado en la parte inferior de la punta y en la orilla de las alas en donde se espera alcanzar temperaturas superiores a los 2500°F ( $\approx 1370^\circ\text{C}$ ).

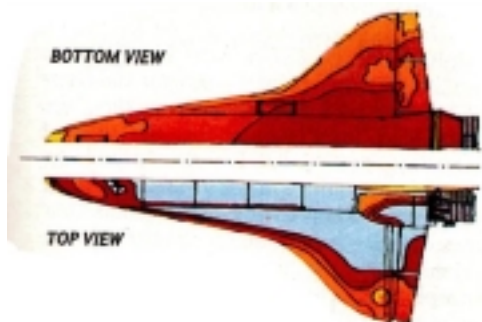


Figura 34

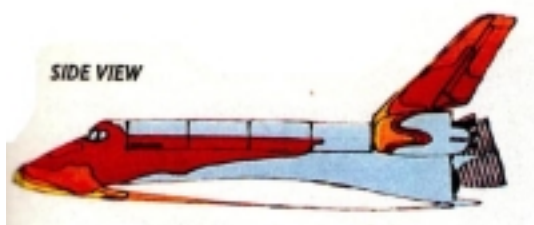


Figura 35

Rangos de temperatura  
(en °F)



En la unidad I ya nos hemos encontrado con tres tipos de superficies de nivel:

- 1) esferas con centro en el origen y radio  $r$  que son superficies de nivel de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (13)$$

- 2) cilindros con centro en el origen y eje el eje  $Z$ , que son superficies de nivel de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 \quad (14)$$

- 3) planos, que son superficies de nivel de la función

$$f(x,y,z) = ax + by + cz \quad (15)$$

Por otra parte, cualquier gráfica de una función  $z=f(x,y)$ , es una superficie de nivel, basta considerar  $g(x,y,z)=z-f(x,y)$  y entonces la superficie de nivel  $g(x,y,z)=0$  es la gráfica de  $z=f(x,y)$ . Es por esto que a las gráficas de este tipo de funciones o de las ecuaciones de tres variables se les llama superficies.

Para trazar una superficie de nivel se usan sus trazas con planos de la forma  $x=c$ ,  $y=c$  y  $z=c$ .

**1.5 superficies cuadráticas**

Las superficies de nivel más importantes son las llamadas **superficies cuadráticas**. Se les llama así a las gráficas de ecuaciones del tipo