

## Límites y continuidad

### 1. Límite de funciones de dos variables

Hasta ahora hemos evitado entrar en la cuestión de qué significa el símbolo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}$$

que aparece en la noción de diferenciabilidad, porque no queríamos que los detalles técnicos de la definición de límite oscurecieran la discusión sobre la diferenciabilidad. Pero ha llegado el momento en que no podemos demorar más esa cuestión. Por esa razón esta sección se dedica a la definición y cálculo de límites en funciones de dos variables, con la vista puesta en nuestro objetivo de entender plenamente la definición de diferenciabilidad.

Basándonos en lo que hemos aprendido en el cálculo de una variable, está bastante claro lo que queremos decir cuando escribimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Cuando decimos que el límite de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  es  $L$ , estamos diciendo que si se calcula  $f$  en un punto  $(x, y)$  cercano a  $(x_0, y_0)$ , se obtendrá un valor que tal vez no sea  $L$ , pero que estará muy cerca de  $L$ . Estará tanto más cerca, cuanto más acerquemos  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$ .

Como puede verse, en esta descripción del límite la idea central es la de distancia. Y además es preciso señalar que no hay ninguna diferencia entre esta idea de límite y la que se utiliza en funciones de una variable.

Si queremos ser más precisos, y obtener una definición rigurosa, la mejor forma de pensar en esta definición de límite consiste probablemente en centrarnos en la idea de *control del error*. Nos fijamos un objetivo de error máximo tolerable, dado por el número  $\varepsilon$ . Debemos pensar por tanto que  $\varepsilon$  será un número pequeño, algo como 0,001 si deseamos cometer un error de milésimas, o como 0,000001 si el tamaño del error máximo debe ser del orden de millonésimas. Vamos a medir entonces el error que se comete al calcular  $f(x, y)$  en lugar de  $f(x_0, y_0)$ , y queremos que ese error sea menor que  $\varepsilon$ . Es decir, queremos que sea

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Naturalmente, no podemos esperar que esto ocurra sea cual sea el valor de  $(x, y)$  que se utilice. Para que el error sea pequeño, debemos tomar  $(x, y)$  cerca de  $(x_0, y_0)$ . Y así llegamos a la versión casi definitiva de la definición de límite:

**Definición 1.1** (Definición provisional de límite). *Decimos que el límite de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  es  $L$  si, sea cual sea el error máximo  $\varepsilon$  que hayamos fijado, se puede garantizar que se cumple*

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

*cuando  $(x, y)$  está suficientemente cerca de  $(x_0, y_0)$ .*

Para convertir ésto en una definición formal debemos precisar la parte que aparece subrayada en esta definición. ¿Cuáles son los  $(x, y)$  que están “suficientemente cerca” de  $(x_0, y_0)$ ? Pues todos aquellos cuya distancia a  $(x_0, y_0)$  es pequeña. Una forma de garantizar que esa distancia sea pequeña es tomar un número  $\delta$ , pequeño, y pedir que se cumpla

$$d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$$

Si por ejemplo tomamos  $\delta = 0,0001$ , estamos pidiendo que la distancia entre  $(x, y)$  y  $(x_0, y_0)$  sea menor que una diezmilésima. El número  $\delta$  es la pieza que nos faltaba en nuestra definición de límite:

**Definición 1.2** (Definición de límite). *Decimos que el límite de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  es  $L$  si, sea cual sea el error máximo  $\varepsilon$  que hayamos fijado, se puede elegir un número  $\delta$  tal que, para todos los  $(x, y)$  que cumplen*

$$d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$$

*se puede garantizar que se cumple*

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

*En lenguaje formal:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Hay que pensar en esta definición como una especie de contrato: si tú me dices el error  $\varepsilon$  que estás dispuesto a admitir, yo me comprometo a encontrar el  $\delta$  que garantiza que si tomas  $(x, y)$  a distancia menor que  $\delta$  de  $(x_0, y_0)$ , los valores de  $f(x, y)$  que vas a obtener se parecen al valor  $f(x_0, y_0)$  con un error menor que  $\varepsilon$ .

**Ejemplo 1.3.** *Supongamos dada la función  $f(x, y) = xy$ . Vamos a demostrar que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} f(x, y) = 12$$

*Esto es, informalmente, que vamos a demostrar que cuando  $x$  está cerca de 3 e  $y$  está cerca de 4, su producto está cerca de 12. ¡Menudo descubrimiento! Naturalmente, no necesitamos una definición rigurosa de límite para convencernos de una simpleza como ésta. Pero nos viene bien un ejemplo tan sencillo como éste para ver cómo se usa la definición de límite. Después nos ocuparemos de las situaciones más complicadas, que son las que realmente nos interesan.*

*Para demostrar que el límite es 12 tenemos que pensar que  $\varepsilon$  es un número muy pequeño (algo como una millonésima, para fijar ideas). Y tenemos que garantizar que*

$$A = |f(x, y) - L| = |xy - 12| < \varepsilon$$

*Esta desigualdad es nuestro objetivo. Para conseguirlo tenemos que utilizar el hecho de que nosotros controlamos cómo de lejos está el punto  $(x, y)$  del punto  $(3, 4)$ . Es decir, que podemos suponer que la distancia*

$$B = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

*es tan pequeña como queramos. El trabajo que tenemos que hacer es demostrar que si  $B$  es muy pequeño, entonces  $A$  es muy pequeño, más pequeño que el  $\varepsilon$  que hemos elegido.*

Esto puede parecer al principio muy difícil porque, de hecho, la expresión de  $B$  es más complicada que  $A$ . Pero con un poco de práctica se adquiere la habilidad necesaria. En concreto, una de las observaciones más útiles es ésta: la distancia entre  $x$  y 3 no puede ser mayor que la distancia de  $(x, y)$  a  $(3, 4)$ . En fórmulas:

$$|x - 3| < \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

Y de la misma forma

$$|y - 4| < \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

Esto significa que si controlamos el tamaño de  $B$ , también tenemos controlado el tamaño de  $|x - 3|$  e  $|y - 4|$ .

Otro truco estándar es el siguiente: sumamos y restamos una misma cantidad en la expresión que nos interesa controlar para relacionarla con las cantidades que tenemos controladas. En nuestro caso eso se hace así. Queremos controlar

$$A = |xy - 12|$$

y lo que tenemos controlado es  $|x - 3|, |y - 4|$ . Pues para conseguirlo vamos a hacer que estas dos cantidades aparezcan en  $A$ :

$$A = |xy - 12| = |xy - 3y + 3y - 12| = |(x - 3)y + 3(y - 4)| \leq |y||x - 3| + 3|y - 4|$$

(también se podría haber sumado y restado  $4x$ ). En el último paso hemos usado la desigualdad triangular y las propiedades del valor absoluto.

Hemos conseguido entonces controlar el tamaño de  $A$  mediante una expresión en la que intervienen tres ingredientes:

$$|x - 3|, |y - 4|, |y|$$

Está claro que tenemos controlado el tamaño de los dos primeros. Pero el tercero,  $|y|$ , ¿está controlado? A primera vista no, pero si pensamos un poco, es fácil ver que sí. Tenemos controlado  $|y - 4|$ . Eso significa que  $y$  es un número no muy distinto de 4. Y por tanto el tamaño de  $|y|$  no puede ser demasiado grande: ¡no se puede estar a la vez cerca de 4 y ser muy grande! Así que parece que todos los ingredientes están controlados.

¿Cómo convertimos estas ideas en una demostración? Empezamos suponiendo que la distancia  $B$  es muy pequeña. ¿Cómo de pequeña? Más pequeña que un cierto número  $\delta$ , que elegiremos astutamente dentro de un momento. Entonces, si se cumple

$$B = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} < \delta$$

según hemos visto, también se cumple:

$$|x - 3| < \delta, \quad |y - 4| < \delta$$

Ahora vamos a controlar  $|y|$  con cuidado. La última desigualdad significa:

$$-\delta < y - 4 < \delta$$

Luego

$$4 - \delta < y < 4 + \delta$$

Y si  $\delta$  es realmente pequeño, de hecho basta con que sea menor que 1, entonces se deduce que

$$3 < y < 5$$

Por lo que, obviamente  $|y| < 5$ . Eso significa que:

$$A = |xy - 12| \leq |y||x - 3| + 3|y - 4| < 5\delta + 3\delta = 8\delta$$

Este el momento de elegir  $\delta$ . Nuestro objetivo inicial era demostrar que podíamos conseguir que fuese  $A < \varepsilon$ . Y hemos obtenido  $A < \delta$ . Basta por lo tanto con asegurarnos de que

$$8\delta < \varepsilon$$

Es decir, basta tomar  $\delta < \varepsilon/8$ . Con un pequeño matiz: tenemos que asegurarnos de que  $\delta$  sea menor que 1, para que el control de  $|y|$  a partir de  $|y - 4|$  esté garantizado. Pero eso no supone ningún problema, porque suponer que  $\delta < 1$  equivale a suponer que no nos alejamos de  $(3, 4)$  más de una unidad, y eso no nos debe preocupar cuando pensamos en puntos muy cercanos a  $(3, 4)$ .

Si se lee con detenimiento lo que hemos hecho, se verá que es esto: dado cualquier valor de  $\varepsilon$  (¡por pequeño que sea!), nosotros tomamos  $\delta = \min(1, \varepsilon/8)$ . Y entonces decimos que si se toma un punto  $(x, y)$  que cumpla

$$d((x, y), (3, 4)) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} < \delta$$

está garantizado que se cumple

$$|xy - 12| < \varepsilon$$

Esto es precisamente lo que significa la afirmación de que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} f(x, y) = 12$$

Este ejemplo ilustra el tipo de técnicas que se pueden emplear para una demostración formal directa (tipo  $\epsilon, \delta$ ) de un límite. A pesar de que la demostración puede parecer complicada, la conclusión que queríamos obtener parecía evidente. El límite era trivial. Si todos los problemas que conducen a un límite fueran como este ejemplo, nuestro trabajo sería muy sencillo. Pero a menudo las cosas son más complicadas.

**Ejemplo 1.4.** Supongamos que estamos trabajando en algún problema en el que interviene la función:

$$f(x, y) = \frac{2 - 3x - y + x^2 - y^2}{1 - x - y}$$

Y que alguien nos pregunta cuánto vale la función en  $(1, 0)$ . La sustitución de estos valores en la fórmula produce una indeterminación:  $\frac{0}{0}$ . ¿Qué hay que hacer entonces?

En el cálculo de una variable aparecen ejemplos parecidos. Si tenemos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y alguien nos pregunta por  $f(1)$ , al sustituir obtenemos  $0/0$ . Pero claro, en ese caso se tiene

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Y eso significa que para cualquier valor de  $x$  salvo  $x = 1$ , se tiene

$$f(x) = (x + 1)$$

No podemos usar la fórmula inicial de  $f$  para calcular  $f(1)$ . Pero este cálculo significa que si sustituimos en esa misma fórmula un valor de  $x$  muy cercano a 1 (algo como  $x = 0,99999$ ) obtendremos un valor de  $f$  muy cercano a  $x + 1 = 1,99999 \approx 2$ . Y cuanto más se parezca  $x$  a 1, más se parecerá  $f(x)$  a 2. Naturalmente, estamos diciendo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Y esa información puede ser muy útil para quien esté trabajando con la fórmula de  $f$ . Aunque esa fórmula no produce ningún valor cuando  $x = 1$ , sabemos que sus valores cerca de ese punto son muy parecidos a 2.

Volviendo a la función de dos variables con la que hemos empezado el ejemplo, parece razonable preguntarse si aquí ocurre algo parecido. Es decir, nos preguntamos si existe algún valor  $L$  tal que, cuando  $(x, y)$  está muy cerca de  $(1, 0)$ , la fórmula

$$f(x, y) = \frac{2 - 3x - y + x^2 - y^2}{1 - x - y}$$

produzca valores muy parecidos a  $L$ . Animamos al lector a tratar de averiguar cuál podría ser ese número  $L$ . Por ejemplo, se puede usar una calculadora. Tomamos algo como  $x = 0,99999$ ,  $y = 0,00001$ , y sustituimos en la expresión de  $f$ . ¿Qué valor se obtiene?

En este ejemplo nos hemos encontrado con un límite que conduce a una indeterminación de la forma  $0/0$ . Podría pensarse que esas situaciones son artificialmente complicadas, y que en la mayoría de los casos, en los límites que nos interesan, no se presentarían complicaciones como éstas.

Nada más lejos de la realidad. Nosotros hemos llegado al estudio del límite porque estábamos tratando de entender la definición de diferenciabilidad. Y allí teníamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\text{función} - (\text{plano tangente})}{\text{distancia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0)} = 0$$

Pero si la función es diferenciable, el plano tangente será una muy buena aproximación a  $f$ , para  $(x, y)$  cerca de  $(x_0, y_0)$ . Eso significa que la diferencia que aparece en el numerador será casi cero. Y, por supuesto, la distancia que aparece en el denominador también estará muy cerca de cero cuando  $(x, y)$  se acerca a  $(x_0, y_0)$ . Es decir, que la definición de diferenciabilidad, cuando funciona bien, ¡conduce inevitablemente a una indeterminación de la forma  $0/0$ ! La diferencia con el ejemplo anterior es que aquí sabemos cuál es la respuesta que nos gustaría obtener. Para demostrar que la función es diferenciable, debemos demostrar que la indeterminación se resuelve y el límite vale cero.

## 1.1. Analogías y diferencias con los límites de funciones de una variable

Hasta aquí hemos discutido cuál debe ser la definición de límite. Y hemos obtenido una definición de límite que coincide en lo esencial con la que el lector ya conocía del cálculo de una variable. La única diferencia importante es el hecho de que debemos emplear la distancia del plano para medir cómo de lejos está  $(x_0, y_0)$  de  $(x, y)$ .

En el caso de funciones de una variable, la distancia entre un valor  $x$  y un valor  $x_0$  viene dada por el valor absoluto de la diferencia:

$$|x - x_0|$$

y la única complicación asociada a la distancia es que  $x$  puede estar a la izquierda o a la derecha de  $x_0$ . Eso obliga a considerar a veces los límites laterales para establecer si existe o no el límite de la función en  $x_0$ .

Al pasar a las funciones de dos variables las cosas se complican. En primer lugar porque, como ya hemos visto, la distancia se calcula con una fórmula más complicada:

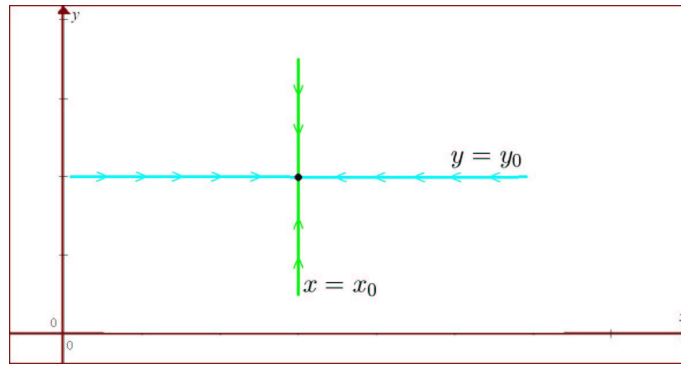
$$d((x, y), (x_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Pero sobre todo porque la forma en la que un punto  $(x, y)$  puede acercarse al punto  $(x_0, y_0)$  es mucho más complicada que en el caso unidimensional. El próximo apartado se dedicará por completo a analizar esas complicaciones.

**Operaciones con límites** Al igual que hemos visto en la primera parte del curso, hay una serie de teoremas que simplifican el análisis de los límites de funciones de dos variables: el límite de la suma es la suma de los límites cuando estos existen, etcétera. Pero, para evitar repeticiones tediosas, preferimos posponer la este tipo de resultados hasta la discusión de continuidad.

## 1.2. Límites por trayectorias

Antes hemos dejado pendiente un ejemplo (el 1.4) en el que nos hemos encontrado con una indeterminación de la forma  $0/0$ . Para simplificar el estudio del límite, podemos hacer algo similar a lo que hicimos en el caso de las derivadas parciales, tratando de reducir el número de variables independientes. Recordemos que, entonces, para estudiar la función  $f(x, y)$  fijábamos una de las variables, haciendo por ejemplo  $y = y_0$  y estudiábamos la función  $f(x, y_0)$ , que depende únicamente de la variable  $x$ . Lo que hacíamos entonces se puede entender geoméricamente así: hemos elegido acercarnos al punto  $(x_0, y_0)$  a lo largo de la recta  $y = y_0$  del plano  $(x, y)$ . De la misma forma, si consideramos la función  $f(x_0, y)$  entonces podemos acercarnos al punto  $(x_0, y_0)$  a lo largo de la recta  $x = x_0$ . En la siguiente figura se ilustran estas dos formas de acercarnos al punto que nos interesa, por rectas verticales y horizontales.



¿Qué sucede si aplicamos esta idea a nuestro ejemplo?

**Ejemplo 1.5.** Dada la función

$$f(x, y) = \frac{2 - 3x - y + x^2 - y^2}{1 - x - y}$$

Nos hemos preguntado hace un rato si existe el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{2 - 3x - y + x^2 - y^2}{1 - x - y}$$

Si aplicamos aquí la idea que usamos en el caso de las derivadas parciales podemos hacer  $x = 1$  y obtener:

$$f(1, y) = \frac{-y - y^2}{-y}$$

Y si ahora nos preguntamos por el límite

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(1, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - y^2}{-y}$$

obtendremos como respuesta 1. Recapitulando: eso significa que si nos acercamos al punto  $(1, 0)$  a lo largo de la recta vertical  $x = 1$  del plano, los valores de  $f$  que se obtienen son cada vez más parecidos a 1. Y esto tiene una consecuencia evidente: el límite de  $f$  si existe, sólo puede valer 1.

Es esencial darse cuenta de que no hemos demostrado la existencia del límite (enseguida veremos un ejemplo que aclara este punto). Pero ahora tenemos un candidato a ser el límite, y sabemos además que es el único candidato posible.

Si en lugar de hacer  $x = 1$  hacemos  $y = 0$ , para aproximarnos por una recta horizontal, obtendremos

$$f(x, 0) = \frac{2 - 3x + x^2}{1 - x}$$

Y al hacernos la pregunta

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 3x + x^2}{1 - x}$$

obtenemos de nuevo como respuesta 1, en conformidad con nuestro anterior resultado.

A la vista de estos resultados podemos sospechar que en este ejemplo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 1$$

Animamos al lector a que intente construir una demostración formal  $(\varepsilon - \delta)$  de este resultado.

---

El ejemplo anterior ha mostrado como utilizar los métodos del cálculo de una variable para obtener, en los casos de indeterminación, un candidato a ser el límite de la función. Y de hecho, en ese ejemplo, el valor obtenido era realmente el límite de la función. Pero no siempre es así, como se muestra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.6.** Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ ?? & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

si nos preguntamos por su valor cuando  $(x,y)$  se acerca a  $(0,0)$ , al sustituir en la fórmula obtendremos  $0/0$ . El mismo método del ejemplo anterior nos llevaría a considerar las funciones

$$\begin{cases} f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \\ f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \end{cases}$$

así que podríamos sentirnos tentados a pensar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Pero supongamos que a alguien se le ocurre estudiar los valores de  $f$  en la diagonal  $y = x$  del plano. Eso significa que debemos considerar la función:

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Es decir, que en cualquier punto de la diagonal, por cerca que estemos del origen, la función  $f$  toma el valor  $1/2$ . ¿Cómo podría ser entonces que el límite en el origen fuese  $0$ ? La conclusión en este caso, está clara. El límite en el origen no existe: no puede ser a la vez  $0$  y  $1/2$ .

De hecho, en lugar de estudiar rectas concretas que pasan por el origen, podemos considerar la ecuación  $y = mx$  que representa un haz de rectas por el origen para distintos valores de  $m$  (la única recta por el origen que falta en este haz es  $x = 0$ ). Si estudiamos los valores de  $f$  en los puntos de la recta  $y = mx$  obtenemos:

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

lo cual confirma lo que antes habíamos obtenido: el resultado depende de la recta que se utilice, y por lo tanto no existe el límite.

---

El anterior ejemplo ilustra una de las características más importantes de los límites en funciones de dos (o más) variables: el estudio de los límites por trayectorias NUNCA sirve para demostrar la existencia de un límite, aunque puede servir para demostrar que el límite no existe.



### 1.3. Es suficiente estudiar los límites en el origen

En el resto de este tema nos vamos a centrar en el estudio de límites en el origen; es decir, límites de la forma:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

Hacer esto no supone ninguna limitación, porque se tiene el siguiente resultado:

**Lema 1.7.** *Para estudiar el límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

*se puede hacer un cambio de variable:*

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$$

*y considerar la función*

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0)$$

*Entonces se cumple que*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ si y sólo si } \lim_{(\tilde{x},\tilde{y}) \rightarrow (0,0)} g(\tilde{x}, \tilde{y}) = L$$

**Ejemplo 1.8.** *Supongamos que queremos estudiar el límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 2x^2 - y^3 + 2y^2x}{y - 2x}$$

*Para hacer esto podemos hacer un cambio de variable:*

$$\begin{cases} x = \tilde{u} + 1 \\ y = \tilde{v} + 2 \end{cases}$$

*Y obtener:*

$$\frac{(u+1)(v+2) - 2(u+1)^2 - (v+2)^3 + 2(v+2)^2(u+1)}{(v+2) - 2(u+1)} = \frac{9uv + 6u - 3v - 2u^2 - v^3 - 4v^2 + 2v^2u}{v - 2u}$$

*Así que en lugar de estudiar el límite inicial, pasamos a estudiar este límite en el origen:*

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{9uv + 6u - 3v - 2u^2 - v^3 - 4v^2 + 2v^2u}{v - 2u}$$

---

Combinando estas observaciones con nuestros comentarios previos sobre el análisis del límite mediante trayectorias se obtiene este resultado:

**Teorema 1.9.** *Para estudiar el límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

*se puede estudiar el límite a lo largo de las rectas  $y = mx$  que pasan por el origen; es decir, estudiamos:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$$

*donde  $m$  es un parámetro. Si para algún valor de  $m$  este límite no existe, o si el valor del límite depende de cuál sea el  $m$  empleado, entonces podemos asegurar que no existe el límite de  $f$  en  $(0, 0)$ .*

#### 1.4. No es suficiente con estudiar las rectas por el origen

Hemos visto que, para que exista límite de  $f$  en el origen, es *necesario* que todas las rectas de la forma  $y = mx$  produzcan el mismo resultado cuando calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$$

Pero no es suficiente, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.10.** *Vamos a analizar el límite en el origen de la función*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Podemos empezar analizando lo que ocurre al tomar las rectas  $y = mx$  que pasan por el origen. Se obtiene:*

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$$

*y por tanto*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$$

independientemente de  $m$ . Por supuesto, en el haz de rectas  $y = mx$  falta la recta vertical por el origen, de ecuación  $x = 0$ . Pero si se estudian los valores de  $f$  a lo largo de esta recta se obtiene

$$f(0, y) = 0$$

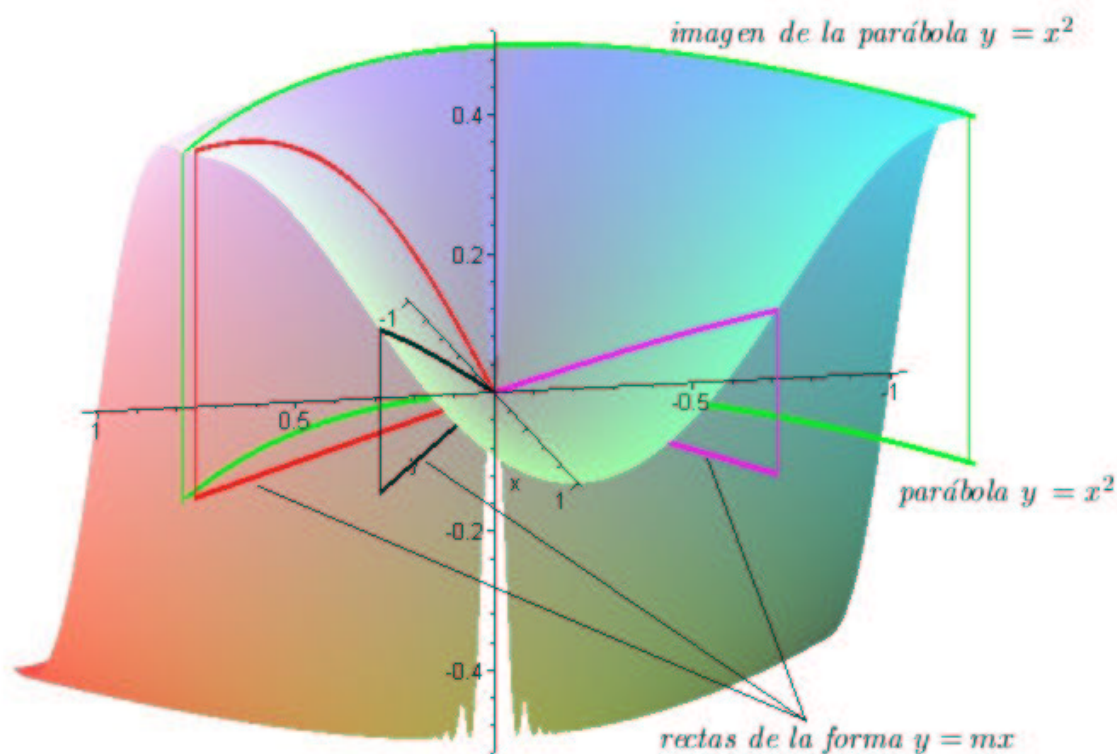
Así que todas las rectas por el origen producen el mismo valor, 0.

Ahora bien, además de las rectas podemos utilizar otras curvas para aproximarnos al origen. Por ejemplo, la parábola  $y = x^2$  pasa por el origen, y tiene sentido que nos preguntemos cuáles son los valores de  $f$  en los puntos de esa parábola, a medida que nos acercamos al origen. Eso significa que tenemos que estudiar el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Es decir, que en cualquier punto de la parábola, y por lo tanto, tan cerca del origen como queramos, el valor de  $f$  es  $1/2$ . Eso elimina la posibilidad de el límite en el origen sea 0, como parecían indicar las rectas.

La siguiente figura muestra una gráfica de la función que puede ayudar a entender lo que está ocurriendo en este ejemplo.



Como se aprecia en la figura, la imagen de la parábola  $y = x^2$  (en verde en la figura) recorre una parte de la gráfica situada a altura constante  $1/2$ , mientras que las imágenes de distintas rectas por el origen son curvas que pasan a altura 0 por el origen, como hemos calculado.

Como muestra este ejemplo, incluso aunque todas las rectas produzcan el mismo valor, puede ocurrir que una curva de otro tipo que pase por el origen (una parábola, una espiral, una curva

sinusoidal, etc.) nos lleve a un valor distinto. Y obviamente no podemos probar todas las curvas imaginables. Por esa razón decíamos que es inútil tratar de demostrar la existencia de un límite considerando trayectorias que pasen por el origen. Este método puede servir a lo sumo para:

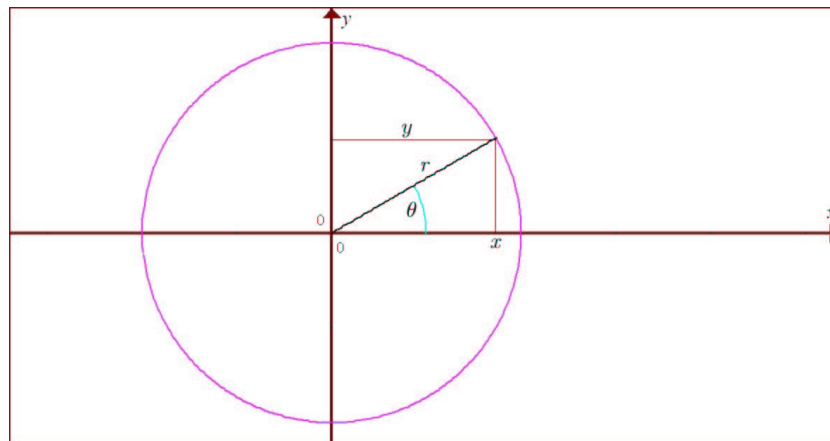
1. Proponer un posible valor del límite si lo desconocemos.
2. Demostrar que el límite no existe, encontrando dos trayectorias que produzcan límites diferentes.

## 2. Límites y coordenadas polares

Las coordenadas polares permiten identificar un punto de coordenadas  $(x, y)$  del plano mediante otro par de números  $(r, \theta)$ , definidos mediante estas relaciones:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

La geometría de las coordenadas polares se ilustra en esta figura:



de modo que, como se ve,  $r$  representa la distancia del punto  $(x, y)$  al origen. Por esa razón, si  $r$  tiende a 0 el punto de coordenadas  $(r, \theta)$  se aproxima al origen. Esa es la idea que nos lleva a proponer el siguiente método para analizar un límite en el origen.

Para estudiar la existencia del límite

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

efectuamos el cambio a coordenadas polares y obtenemos una nueva función

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

A continuación analizamos el límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Lo interesante de esta idea es que de nuevo nos permite analizar el límite de dos variables mediante un límite en una sola variable.

Pues bien, tenemos un primer resultado que, de nuevo, nos va a servir sólo para asegurar que algunos límites no existen.

**Proposición 2.1.** *Si el límite*

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

*no existe o depende de  $\theta$ , podemos asegurar que  $f$  no tiene límite en  $(0, 0)$ .*

La dificultad en el uso de las coordenadas polares estriba en que la recíproca no es cierta: aunque ese límite no dependa de  $\theta$ , todavía puede ocurrir que el límite no exista, como muestra este ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Cambiando a coordenadas polares, se tiene:

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} \frac{r^2}{r \sin \theta} & \text{si } \theta \neq 0, \pi \\ 0 & \text{si } \theta = 0, \pi \end{cases}$$

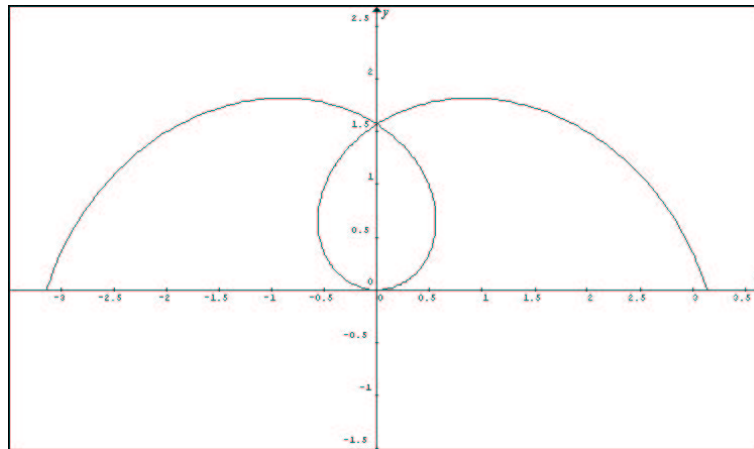
con lo que vemos que para cada valor fijo del ángulo  $\theta$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r \sin \theta} = 0 & \text{si } \theta \neq 0, \pi \\ \lim_{r \rightarrow 0} 0 & \text{si } \theta = 0, \pi \end{cases}$$

Por tanto el límite en polares vale 0, independientemente del valor del ángulo  $\theta$ . Podríamos pensar al llegar a esta conclusión que el límite vale cero. Sin embargo, si observamos la expresión que se ha obtenido:

$$\frac{r^2}{r \sin \theta} = \frac{r}{\sin \theta}$$

nos daremos cuenta de que para valores del ángulo  $\theta$  cercanos a 0, esta expresión no está acotada. De hecho si consideramos la curva cuya ecuación en polares es  $r = \theta$  que se ilustra en esta figura:



vemos que cuando nos acercamos a  $(0,0)$  a lo largo de esa curva es:

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r \sin r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\sin r} = 1$$

lo cual contradice nuestra anterior conjetura de que el límite era 0 y, de hecho, demuestra que el límite no existe.

A la vista de ejemplos como éste es natural pensar que las coordenadas polares sirven sólo para demostrar que un límite no existe, pero no para establecer su existencia. Existe sin embargo un caso importante en el que es posible utilizarlas para demostrar la existencia del límite. En concreto, se tiene este resultado, en el que la idea clave es precisamente el control sobre la parte de la función que depende del ángulo.

**Teorema 2.3.** *Supongamos que se puede descomponer la función  $F(r, \theta)$  de esta forma:*

$$F(r, \theta) = h(r)G(\theta)$$

*donde además*

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0$$

*Entonces*

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

*si y sólo si la función  $G(\theta)$  está acotada en  $[0, 2\pi]$*

Este teorema sólo permite demostrar que un límite vale 0. Pero, puesto que demostrar

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

es lo mismo que demostrar

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x, y) - L = 0$$

esto no supone una verdadera limitación.

*Observación.* La condición es necesaria y suficiente, así que este resultado puede usarse tanto para usar que el límite existe como para probar que no existe. En el anterior ejemplo, en el que era

$$G(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$$

la función  $G$  era por supuesto no acotada, como ya indicamos. Por lo tanto, el límite no puede ser cero, y en consecuencia no existe, como ya dijimos.

Veamos un par de ejemplos, en los que se emplean las coordenadas polares para estudiar la existencia de un límite:

#### Ejemplo 2.4.

1. Para estudiar si la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

tiene límite en  $(0,0)$  hacemos el cambio a coordenadas polares:

$$F(r, \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} = r \frac{\cos^3 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = h(r)G(\theta)$$

y vemos que la función

$$G(\theta) = \frac{\cos^3 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

no está acotada: para valores de  $\theta$  cercanos a  $\pi/4$  se obtienen valores de  $G$  arbitrariamente grandes. Por lo tanto el límite de  $f$  en el origen no existe.

2. Para estudiar el límite en  $(0,0)$  de esta función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cambiamos a coordenadas polares:

$$F(r, \theta) = \frac{r^2 \cos \theta |\sin \theta|}{r} = r \cos \theta |\sin \theta|$$

Y llamando  $h(r) = r$ ,  $G(\theta) = \cos \theta |\sin \theta|$  se tiene:

$$F(r, \theta) = h(r)G(\theta)$$

y puesto que la función  $G(\theta) = \cos \theta |\sin \theta|$  es obviamente una función acotada, el teorema nos permite asegurar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

### 3. Continuidad

La definición de continuidad en un punto es una extensión natural del caso de una variable:

**Definición 3.1.** La función  $z = f(x, y)$  es continua en el punto  $(x_0, y_0)$  si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Es decir, que el límite y el valor en el punto existen ambos y coinciden.

La continuidad tiene las siguientes propiedades, que son también extensiones de los resultados sobre límites que ya hemos visto en el caso de una variable.

**Teorema 3.2.**

1. Sumas, productos: Si  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en  $(x_0, y_0)$ , entonces las funciones  $f \pm g$  y  $f g$  son continuas en  $(x_0, y_0)$ .
2. Cocientes: Si, además,  $g(x_0, y_0) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es continua en  $(x_0, y_0)$ .
3. Composición: Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $(x_0, y_0)$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $f(x_0, y_0)$ , entonces  $g \circ f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ .

El teorema precedente nos dice como combinar funciones continuas para obtener nuevas funciones continuas. Por lo tanto este resultado adquiere toda su potencia cuando se combina con un repertorio inicial de funciones continuas suficientemente rico. Recordemos que, como hemos visto en la primera parte del curso, todas las funciones elementales de una variable son continuas en todos los puntos de su dominio. Además:

**Proposición 3.3.** Las funciones (de proyección)  $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas mediante:

$$\begin{cases} p_1(x, y) = x \\ p_2(x, y) = y \end{cases}$$

son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ .  
En consecuencia, cualquier función polinómica en las variables  $(x, y)$  es una función continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1. Abiertos, cerrados, fronteras

Al igual que sucedía en la primera parte del curso, con los teoremas de Bolzano, Weierstrass, etcétera, la noción de continuidad se vuelve útil cuando se consideran los aspectos globales de la continuidad. Es decir, si consideramos funciones que son continuas en *todos* los puntos de un conjunto, entonces es posible extraer algunas consecuencias importantes.

Recordemos por ejemplo que el teorema de Weierstrass afirma que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en todos los puntos del intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo  $[a, b]$ . Recordemos además que el teorema es falso si el intervalo que se considera no es cerrado y acotado. Si queremos buscar un análogo de este teorema en el caso bidimensional, tenemos que aprender a interpretar qué significan en el plano conceptos como *conjunto cerrado* y *conjunto acotado*.

Para poder seguir con esta discusión, por tanto, necesitamos primero introducir algo más de lenguaje que nos permita describir correctamente los distintos tipos de conjuntos del plano.

Empezaremos generalizando el concepto de abierto. La definición que necesitamos (la que permite probar los teoremas que queremos) es la siguiente: un conjunto es abierto si incluye a todos los vecinos suficientemente cercanos de cada uno de sus puntos. Como se ve, para poder precisar esta definición necesitamos aclarar lo que quiere decir esto de los *vecinos suficientemente cercanos*. Ese es el contenido de la siguiente definición:

**Definición 3.4.** Representaremos mediante  $d(p, q)$  la distancia euclídea entre dos puntos  $p = (x_1, y_1)$  y  $q = (x_2, y_2)$  del plano. Recordemos que esa distancia se calcula así:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

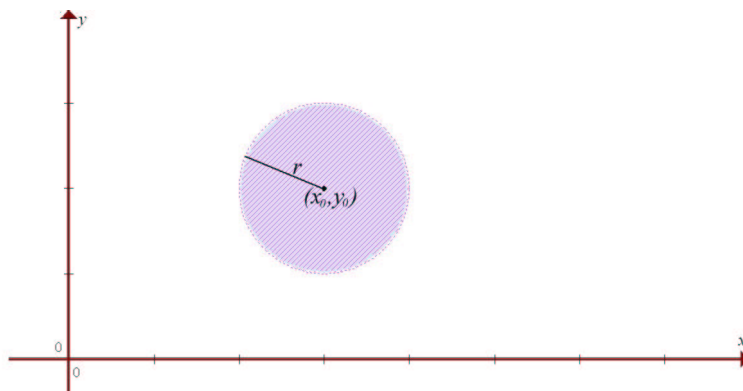
La bola de radio  $r$  centrada en el punto  $(x_0, y_0)$  es el conjunto de puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d((x, y), (x_0, y_0)) < r\}$$

Esta bola de centro  $p = (x_0, y_0)$  y radio  $r$  se representa mediante  $B(p, r)$ .

La definición se ilustra en la siguiente figura:





La bola  $B(p, r)$  incluye a todos los vecinos cercanos a  $(x_0, y_0)$ . Y además permite traducir la expresión *vecinos suficientemente cercanos*, simplemente tomando un valor de  $r$  suficientemente pequeño. Así, podemos definir lo que quiere decir que un conjunto es abierto.

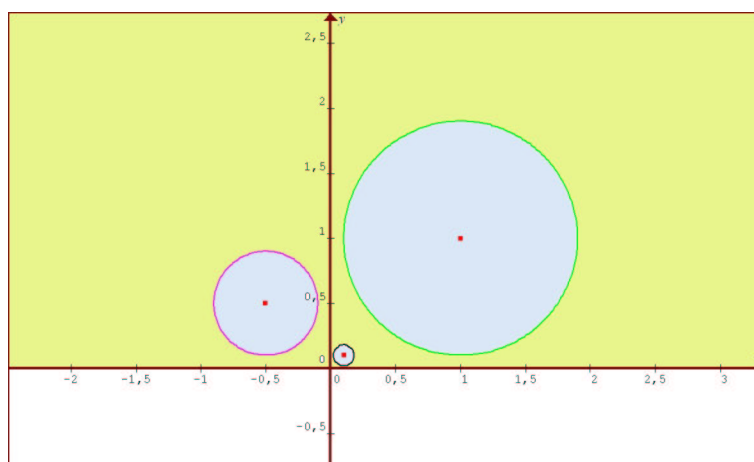
[ **Definición 3.5.** *Un conjunto  $A$  del plano es un conjunto abierto si, para cada punto  $p$  de  $A$  se puede encontrar una bola  $B(p, r)$  tal que todos los puntos de la bola son puntos de  $A$ .*

Naturalmente, en puntos distintos de  $A$  pueden ser necesarios distintos valores de  $r$ .

**Ejemplo 3.6.** *El conjunto*

$$A = \{(x, y)/y > 0\}$$

*(el semiplano superior, sin incluir el eje  $x$ ) es un conjunto abierto. En la siguiente figura se muestran varios puntos del semiplano superior y, para cada uno de ellos, una bola centrada en ese punto y totalmente contenida en el semiplano superior.*



*Como se aprecia en la figura, el radio de la bola depende del punto que se considere.*

Hemos dicho que necesitamos este lenguaje de conjuntos abiertos para obtener resultados a partir de la continuidad. Una primera relación, que nos proporciona una gran variedad de ejemplos es este resultado:

[ **Teorema 3.7.** *Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces el conjunto*

$$\{(x, y)/f(x, y) > 0\}$$

*es un conjunto abierto.*

**Ejemplo 3.8.** El interior de una elipse, es decir el conjunto de puntos que cumplen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

es un abierto, porque la función

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

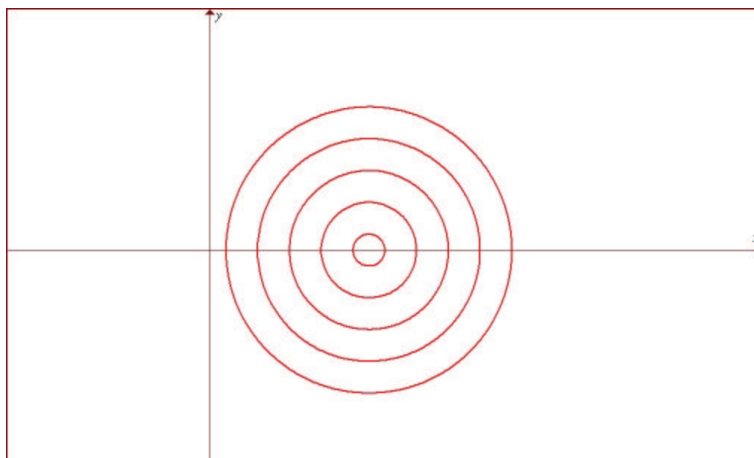
es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

El siguiente ejemplo muestra un conjunto que no es abierto, y debe compararse con el ejemplo 3.6.

**Ejemplo 3.9.** El conjunto

$$A = \{(x, y)/y \geq 0\}$$

no es un conjunto abierto. Si se considera el punto  $(1, 0)$ , que es un punto de  $A$ , es imposible encontrar una bola centrada en  $A$  y cuyos puntos sean todos puntos de  $A$ ; como ilustra la siguiente figura, por muy pequeño que sea el radio que se tome, la bola siempre incluye puntos del semiplano inferior.



El anterior ejemplo sugiere que la diferencia entre abiertos y no abiertos debe buscarse en el borde o frontera del conjunto. Lo siguiente que necesitamos es precisar esta noción de borde, y el anterior ejemplo nos sirve de motivación para la siguiente definición.

**Definición 3.10.** Sea  $A$  un conjunto del plano  $\mathbb{R}^2$ . Un punto  $p$  es un punto frontera de  $A$  si cualquier bola centrada en  $p$  contiene puntos de  $A$  y puntos que no son de  $A$ . La frontera de  $A$  es el conjunto de todos los puntos frontera de  $A$ .  
Por contra, un punto  $p$  es un punto interior de  $A$  si se puede encontrar una bola centrada en  $p$  y cuyos puntos pertenecen todos al conjunto  $A$ .

Con este lenguaje podemos decir que un abierto es un conjunto cuyos punto son todos puntos interiores del conjunto. Obsérvese en los anteriores ejemplos que los puntos frontera del conjunto no tienen porque pertenecer al conjunto.

De hecho, en el caso unidimensional, que hemos visto en la primera parte del curso, un intervalo cerrado es un intervalo que incluye a los puntos situados en su frontera. Esta definición

de cerrado se extiende de forma natural a  $\mathbb{R}^2$ , y nos permite cumplir uno de nuestros objetivos iniciales de este apartado.

[ **Definición 3.11.** *Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es cerrado si todos los puntos frontera de  $A$  pertenecen al conjunto  $A$ .*

Es decir, un conjunto cerrado es un conjunto que incluye a su frontera.

Para completar nuestro objetivo en este apartado, sólo necesitamos generalizar la noción de conjunto acotado. Es decir, un conjunto que no se extiende hasta el infinito. La generalización más conveniente es ésta

[ **Definición 3.12.** *Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es acotado si se puede encontrar una bola centrada en el origen que contiene a todos los puntos de  $A$ . Es decir, que existe un valor  $K > 0$  (el radio de esa bola) tal que, para cualquier punto  $(x_0, y_0)$  de  $A$  se cumple*

$$\sqrt{x^2 + y^2} < K$$

Como hemos dicho al principio de este apartado, nuestro objetivo es generalizar teoremas sobre funciones continuas en un conjunto como el teorema de Weierstrass que hemos visto en la primera parte del curso. En ese teorema aparecen intervalos cerrados y acotados. Esas dos condiciones definen un tipo especial de conjuntos del plano, a los que vamos a dar un nombre.

[ **Definición 3.13.** *Un conjunto  $A$  del plano es compacto si es cerrado y acotado.*

### 3.1.1. Continuidad global

La definición de continuidad global es muy natural:

**Definición 3.14.** *Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en un conjunto  $A$  si es continua en todos los puntos de  $A$ .*

Y, finalmente, aunque todavía no hemos definido formalmente la noción de máximo y mínimo en funciones de dos variables, podemos enunciar, como ejemplo, el teorema que hemos anunciado como generalización del teorema de Weierstrass, y al que volveremos con más detenimiento más adelante al tratar sobre extremos de funciones de dos variables.

[ **Teorema 3.15.** *Si  $A$  es un conjunto compacto del plano, y  $f$  es una función continua en  $A$ , entonces  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absolutos en  $A$ .*