

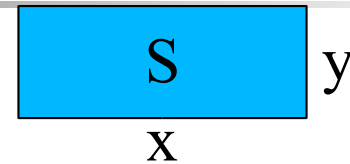
Cálculo II

Prof. Ing. María Elena García
Facultad Politécnica

Universidad Nacional de Asunción

Funciones de Varias Variables

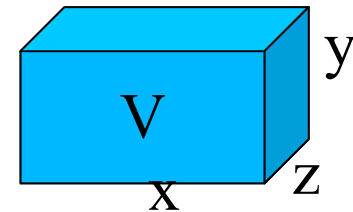
Area de un rectángulo



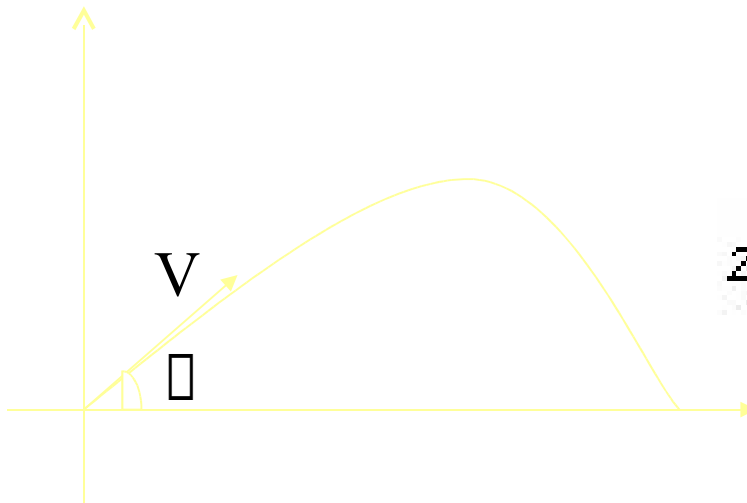
Volumen de un paralelepípedo

Alcance de un proyectil

Función cualquiera



$$R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$



$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Mary Fairfax Somerville
(1780-1872)



Funciones de Varias Variables

Definición

- Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par (x, y) de D le corresponde un número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es función de x e y . El conjunto D es el dominio de definición de f o dominio de existencia y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el recorrido o rango de f .

Cuál es el dominio de definición de la función?

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Es todo el plano xy

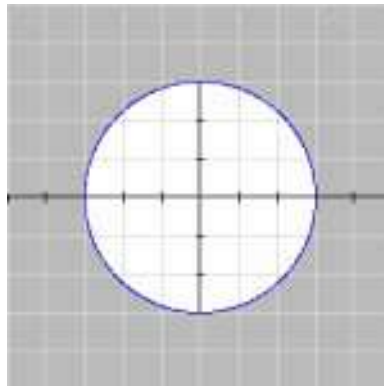
Funciones de Varias Variables

Encontrar el dominio de las siguientes funciones.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

La función f está definida en todos los pares ordenados (x, y) tales que x sea distinto de cero y $x^2 + y^2 \geq 9$.

Por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están fuera del círculo $x^2 + y^2 = 9$ o en $x^2 + y^2 = 9$ inclusive, excepto los del eje y , como se muestra en la figura siguiente:



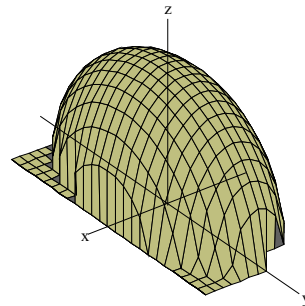
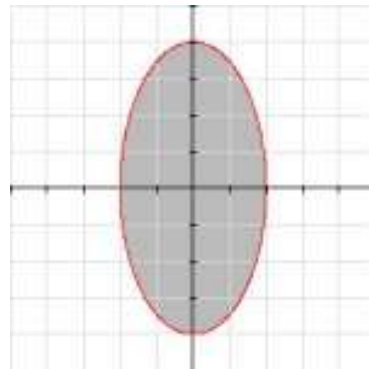
Funciones de Varias Variables

Encontrar el dominio de las siguientes funciones.

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

La función f está definida en todos los puntos (x, y) tales que $4x^2 + y^2 \leq 16$. Es decir, el conjunto dominio está formado por todos los puntos del interior de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

incluyendo la frontera como muestra la figura





Funciones de Varias Variables

Las funciones de dos variables pueden combinarse del mismo modo que las de una variable. Es decir,

- Suma o diferencia: $(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$

- Producto $(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$

- Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ para $g(x, y) \neq 0$

• La función compuesta dada por $(f \circ g)(x, y)$ tiene solamente si g es una función de x e y , además f es una función de una única variable. Entonces,

Composición: $(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$

para todo (x, y) en el dominio de g tal que $g(x, y)$ está en el dominio de f .



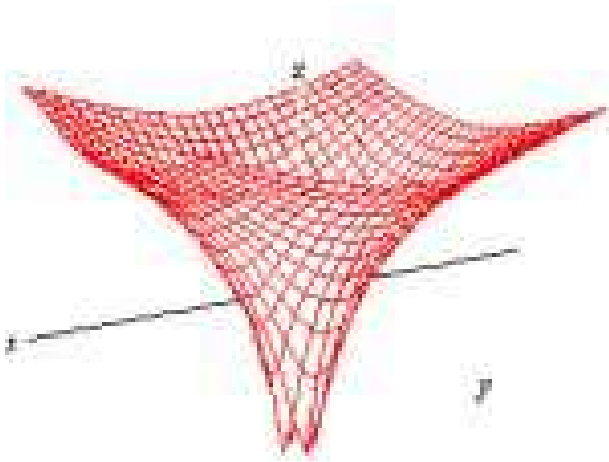
Funciones de Varias Variables

- Frontera
- Puntos interiores
- Dominio Abierto
- Dominio Cerrado
- Dominio Acotado

Funciones de Varias Variables

Superficies

- La gráfica de una función de dos variables f es el conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen $z = f(x, y)$ con (x,y) en el dominio de f .
- Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una **superficie en el espacio**.



En la figura nótese que la gráfica de $z = f(x,y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es \mathbf{D} , el dominio de f .

Funciones de Varias Variables

Ejemplo 1.2

- Dibujar la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ ¿Cuál es el recorrido?

El dominio D implicado por la ecuación que define a f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$, D es el conjunto de todos los puntos que están en interior o en el borde de la elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El **recorrido** de f consta de los

tales que $z = f(x, y)$.

$$0 \leq z \leq 4$$

Funciones de Varias Variables

A cada punto (x,y) del dominio D le corresponde un punto (x,y,z) en la superficie y, recíprocamente, a cada punto (x,y,z) de la superficie le corresponde un punto (x,y) de D .

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

$$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

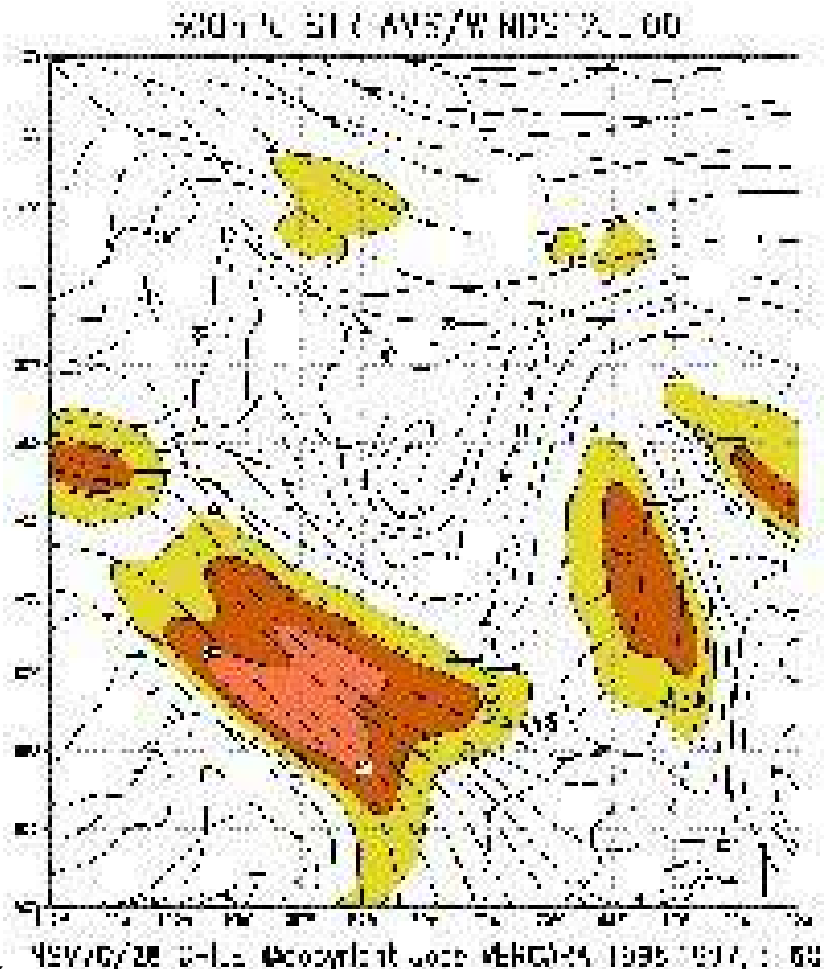
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad 0 \leq z \leq 4$$



Funciones de Varias Variables

■ Curvas de nivel

- Isobaras
- isotermas
- Curvas equipotenciales
- Mapas Topográficos

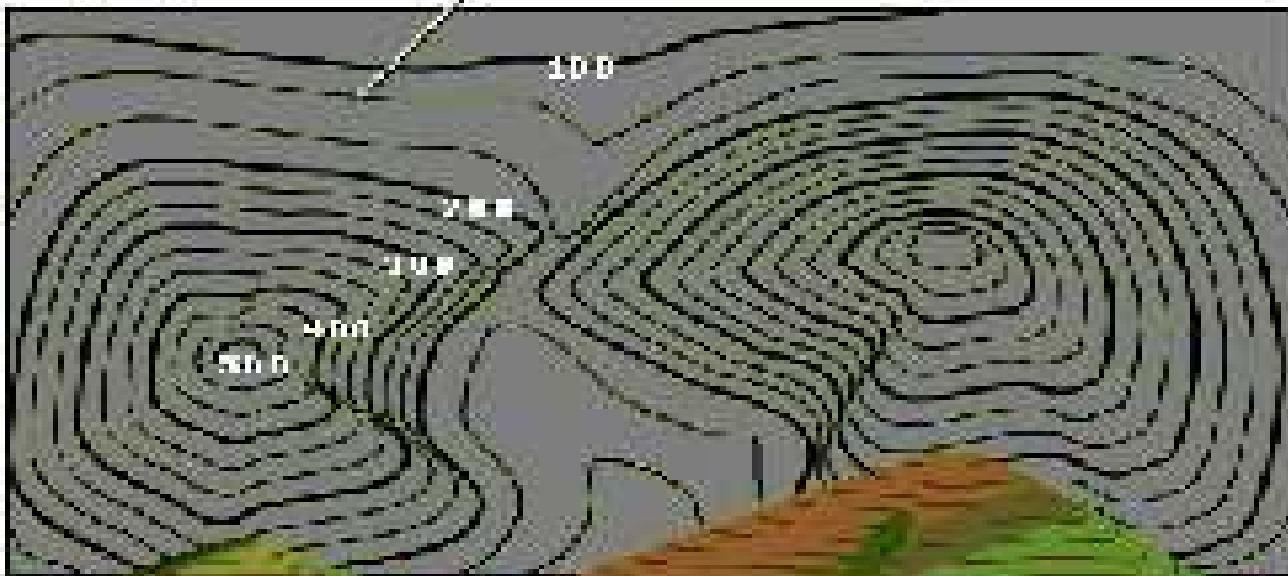


Funciones de Varias Variables

Mapas Topográficos

Mapa Topográfico

1000 m



Funciones de Varias Variables

Ejemplo:

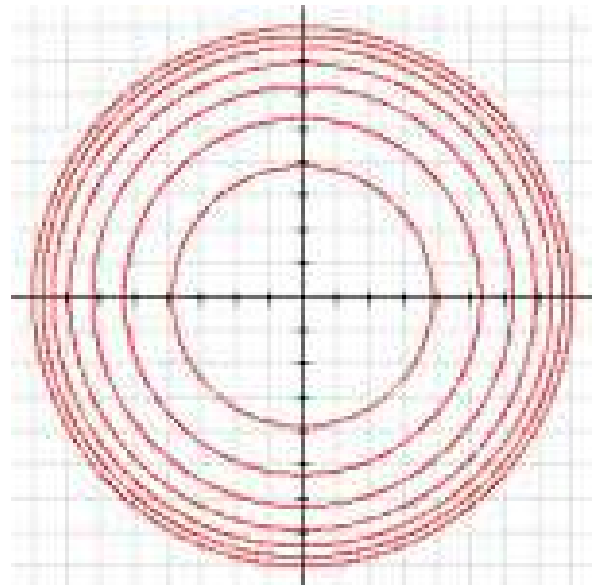
La figura siguiente muestra el hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

Dibujar un mapa de contorno para esta superficie usando curvas de nivel correspondientes a $c = 0, 1, 2, \dots, 8$



Funciones de Varias Variables

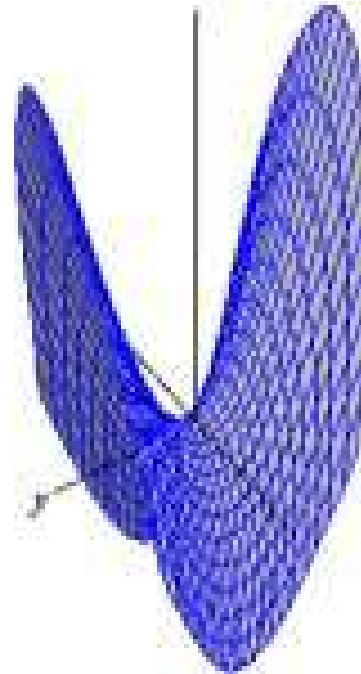
- Para cada valor de c , la ecuación $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy . Así cuando $c = 0$ la curva de nivel es $x^2 + y^2 = 64$ círculo de radio 8.
- La figura siguiente muestra las nueve curvas de nivel pedidas para el hemisferio



Funciones de Varias Variables

- En la figura se muestra el hiperboloide parabólico dado por

$$z = y^2 - x^2$$



- Dibujar una mapa de contorno para esta superficie.



Funciones de Varias Variables

- Función de Producción de Cobb-Douglas, es un ejemplo de una función de dos variables utilizado en Economía. Se usa como modelo para representar el número de unidades producidas en términos de las cantidades de trabajo y capital.

Si x mide las unidades de trabajo e y las unidades de capital, el número de unidades producidas viene dado en este modelo por:

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

Un fabricante estima que su función de producción es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$ donde x es el número de unidades de trabajo e y el de unidades de capital. Comparar el nivel de producción cuando $x = 1000$ e $y = 500$ con el nivel de producción para $x = 2000$ e $y = 1000$.

Bibliografía

- Cálculo Diferencial e integral. Piskunov, N. Montaner y Simon S.A.
- ~~Cálculo con Geometría Analítica. Swokowski, Earl W. Grupo Editorial Iberoamérica.~~
- Cálculo. Volumen I y II. Larson / Hostetler / Edwards. Mc Graw-Hill.
- Cálculo Diferencial e integral. Ayres, Frank Jr. Mendelson Elliot. Schaum
- Cálculo. Farrand, Scott.
- Problemas y ejercicios de análisis matemático. Demidovich B. Paraninfo.
- Cálculo y Geometría Analítica. Protter / Morrey.
- Calculo infinitesimal. Granero Francisco. McGraw-Hill
- Cálculo. Smith, Robert T./Minton, Roland B. McGrawHill
- Cálculo y Geometría Analítica. Stein Sherman K. McGraw-Hill
- Cálculo. Aplicaciones. Hoffman y Bradley. Mc Graw-Hill
- Cálculo y geometría Analítica. Anton, Howard Vol I y II. Editorial Limusa.
- Cálculo con Geometría Analítica. Purcell/Varberg. Pearson. Prentice-Hall
- [Http://math.exeter.edu/rparris](http://math.exeter.edu/rparris)