

Auxiliar 1, Cálculo en Varias Variables
Prof. Marcelo Leseigneur
Prof. Aux. Rodrigo Assar, Sebastián Court

P1 Sea (X, d) un espacio métrico. Considere la función $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Pruebe que (X, d') es un espacio métrico.

P2 Sea $C([0, 1], \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Sea $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

a) Pruebe que las siguientes funciones son métricas:

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \\ \rho(f, g) &= \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \\ \sigma(f, g) &= \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt}\end{aligned}$$

Indicación: Puede serle útil recordar que $\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \cdot \int_0^1 g^2(t)dt$

b) Pruebe que $d(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \rho(f, g)$

P3 Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Pruebe que $\forall x, y, z, w \in X$:

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

b) Deduzca que $\forall x, y, z \in X$:

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

P4 Sea $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n , sobre el cuerpo de los reales. Sea $m > n \geq 1$ y x_1, \dots, x_m reales distintos.

Para $1 \leq p < +\infty$ se define:

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } \|Q\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |Q(x_i)|^p\right)^{1/p}$$

a) Demuestre que $\|\cdot\|_p$ es una norma en el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

b) Demuestre que para $p = 2$, $\|\cdot\|_p$ proviene de un producto interno. Determinélo.

c) Muestre que si $p \neq 2$, $\|\cdot\|_p$ no proviene de un producto interno.

P5 Probar que en todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se cumple que

$$\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

P6 Sea $C([0, 1], \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} . Muestre que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$$

define un producto interno en $C([0, 1], \mathbb{R})$.

P7 Suponga que V es un espacio dotado de un producto interno, y que u, v, x, y pertenecen a V .

(a) Demuestre que $\langle u + v, x + y \rangle - \langle u - v, x - y \rangle = 2 \langle u, y \rangle + 2 \langle v, x \rangle$

(b) Deduzca que $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$

P8 Sea (E, d) un espacio métrico donde además E es un espacio vectorial real. Muestre que d proviene de una norma si y sólo si:

(a) $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$

(b) $d(kx, ky) = |k| d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad k \in \mathbb{R}$