

**Auxiliar 1, Cálculo en Varias Variables**  
**Prof. Marcelo Leseigneur**  
**Prof. Aux. Rodrigo Assar, Sebastián Court**

**P1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Considere la función  $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ . Pruebe que  $(X, d')$  es un espacio métrico.

**P2** Sea  $C([0, 1], \mathbb{R})$  el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ .

a) Pruebe que las siguientes funciones son métricas:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \\ \rho(f, g) &= \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \\ \sigma(f, g) &= \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

Indicación: Puede serle útil recordar que  $\left( \int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \cdot \int_0^1 g^2(t) dt$

b) Pruebe que  $d(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \rho(f, g)$

**P3** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

a) Pruebe que  $\forall x, y, z, w \in X$ :

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

b) Deduzca que  $\forall x, y, z \in X$ :

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

**P4** Sea  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a  $n$ , sobre el cuerpo de los reales. Sea  $m > n \geq 1$  y  $x_1, \dots, x_m$  reales distintos.

Para  $1 \leq p < +\infty$  se define:

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } \|Q\|_p = \left( \sum_{i=1}^m |Q(x_i)|^p \right)^{1/p}$$

a) Demuestre que  $\|\cdot\|_p$  es una norma en el espacio vectorial  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

b) Demuestre que para  $p = 2$ ,  $\|\cdot\|_p$  proviene de un producto interno. Determinélo.

c) Muestre que si  $p \neq 2$ ,  $\|\cdot\|_p$  no proviene de un producto interno.

**P5** Probar que en todo espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  se cumple que

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2$$

**P6** Sea  $C([0, 1], \mathbb{R})$  el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ . Muestre que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$$

define un producto interno en  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

**P7** Suponga que  $V$  es un espacio dotado de un producto interno, y que  $u, v, x, y$  pertenecen a  $V$ .

(a) Demuestre que  $\langle u + v, x + y \rangle - \langle u - v, x - y \rangle = 2 \langle u, y \rangle + 2 \langle v, x \rangle$

(b) Deduzca que  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$

**P8** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico donde además  $E$  es un espacio vectorial real. Muestre que  $d$  proviene de una norma si y sólo si:

(a)  $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$

(b)  $d(kx, ky) = |k| d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad k \in \mathbb{R}$