

# MAT 1202

## Ejercicios Resueltos

### Proyecciones, Mínimos Cuadrados

Prof. Iván Huerta

Versión 2004

## 1 Proyecciones

### 1.1 La Materia

#### 1.1.1 $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

Sea  $W$  subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$  y cada vector  $b \in \mathbb{R}^n$  puede escribirse en forma única como

$$b = w + w^\perp, \quad \text{donde } w \in W, w^\perp \in W^\perp.$$

**Definición 1.1.1** *El vector*

- $P(b) = w$  es la proyección ortogonal de  $b$  en  $W$
- $Q(b) = w^\perp$  es la proyección ortogonal del vector  $b$  en  $W^\perp$ .

**Proposición 1.1.1** *Los operadores de proyección ortogonal satisfacen:*

- $P, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son transformaciones lineales
- $P + Q = I$ .

### **Demostración:**

- a) Sean  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_1 = w_1 + w_1^\perp$ ,  $b_2 = w_2 + w_2^\perp$  con  $w_i \in W$ ,  $w_i^\perp \in W^\perp$ . Entonces  $\alpha b_1 + \beta b_2 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \alpha w_1^\perp + \beta w_2^\perp$ . Como  $W$  y  $W^\perp$  son subespacios  $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$  y  $\alpha w_1^\perp + \beta w_2^\perp \in W^\perp$ . Por lo tanto

$$P(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha P(b_1) + \beta P(b_2)$$

y

$$Q(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha w_1^\perp + \beta w_2^\perp = \alpha Q(b_1) + \beta Q(b_2)$$

Es decir  $P, Q$  son transformaciones lineales.

- b) Como  $b = w + w^\perp = P(b) + Q(b)$  tenemos  $(P + Q - I)(b) = 0$  para cada  $b \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto  $P + Q - I = 0$  (la matriz nula) y entonces  $P + Q = I$ .

#### **1.1.2 Cálculo de $P(b)$**

El primer paso consiste en calcular una base  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  de  $W$ . Como  $\mathcal{B}$  es una base de  $W$  y  $P(b) = w \in W$ , tenemos que  $P(b)$  es combinación lineal de los vectores  $u_i$ . Es decir,

$$P(b) = w = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = Bx,$$

donde  $B$  es la matriz cuya columna  $i$ ésima es el vector  $u_i$ , y el vector  $x$  es el vector de coordenadas de  $P(b)$  con respecto a la base.

El problema es calcular  $x$  tal que  $w^\perp = b - w = b - Bx$  sea perpendicular a  $W$ . Esto se cumple sii  $b - Bx$  es perpendicular a cada vector  $u_i$  sii  $b - Bx$  es perpendicular a las filas de  $B^T$  sii  $B^T(b - Bx) = \vec{0}$  sii

$$B^T Bx = B^T b \quad (\text{Ecuaciones Normales})$$

Por lo tanto, para calcular  $P(b)$  se resuelve primero las ecuaciones normales  $B^T Bx = B^T b$  y la proyección se calcula como  $P(b) = Bx$ .

En resumen, para calcular la proyección de un vector  $b$  a un subespacio  $W$  se realizan los siguientes pasos:

- a) Se calcula una base  $u_1, u_2, \dots, u_k$  de  $W$ .  
b) Se construye la matriz  $B = [u_1 u_2 \dots u_k]$  (columna  $i$  de  $B$  es  $u_i$ ).

c) Se resuelven las ecuaciones normales  $B^T Bx = B^T b$

d) La proyección es  $P(b) = Bx$ .

**Observación:** Note que  $b = w + w^\perp$ , donde  $P(b) = w \in W$  es la proyección de  $b$  en  $W$  y  $Q(b) = w^\perp \in W^\perp$  es la proyección de  $b$  en  $W^\perp$ . Así,

- si se conocen  $b$  y la proyección  $P(b) = w$  de  $b$  en  $W$ , entonces se conoce la proyección de  $b$  en  $W^\perp$   $Q(b) = w^\perp = b - P(b)$ ,
- si se conocen  $b$  y la proyección  $Q(b) = w^\perp$  de  $b$  en  $W^\perp$ , entonces se conoce  $P(b) = w = b - w^\perp$ , la proyección de  $b$  en  $W$

A veces es más conveniente calcular la proyección  $Q(b)$  de  $b$  a  $W^\perp$ , luego, la proyección de  $b$  en  $W$  es  $P(b) = b - Q(b)$ . Esto es particularmente apropiado cuando  $\dim(W^\perp) < \dim(W)$ , pues las ecuaciones normales correspondientes a la proyección en  $W^\perp$  son de menor tamaño.

## 1.2 Ejercicios

### 1.2.1 Ejercicio 1

*Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

*Determine:*

- la proyección de  $b_1$  al espacio columna de  $A$
- la proyección de  $b_2$  al espacio fila de  $A$
- al proyección de  $b_2$  a  $\text{Ker}(A)$

**Solución:**

- i) En este caso  $W = \text{Im}(A)$  es el espacio columna de  $A$ . Realizamos eliminación gaussiana:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como las columnas pivotes de  $A$  son base del espacio columna de  $A$  tenemos que una base de  $\text{Im}(A)$  es  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ . Sea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$B^T B = \begin{bmatrix} 36 & 18 \\ 18 & 11 \end{bmatrix} \quad B^T b_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix},$$

las ecuaciones normales  $B^T Bx = B^T b$  son

$$\begin{bmatrix} 36 & 18 \\ 18 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que  $x = \begin{bmatrix} -55/36 & 7/2 \end{bmatrix}^T$  y por lo tanto la proyección de  $b$  a  $\text{Im}(A)$  es

$$P(b) = Bx = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 47/18 \\ 79/18 \end{bmatrix}$$

- ii) En este caso  $W = \text{Im}(A^T)$ , el espacio fila de  $A$ . Puesto que una base del espacio fila de  $A$  son las filas no nulas de  $U$  tenemos que una base de  $W$  es  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ . La matriz  $B$

es la matriz que tiene como columnas a los vectores que son base de  $W$ . Por lo tanto

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales  $B^T Bx = B^T b_2$  son

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema obtenemos  $x = \begin{bmatrix} -2/23 & -30/23 \end{bmatrix}^T$  y por lo tanto la proyección de  $b_2$  al espacio fila de  $A$  es

$$P(b) = Bx = \begin{bmatrix} -4/23 \\ -2/23 \\ -32/23 \\ 28/23 \\ -32/23 \end{bmatrix}$$

- iii) El método básico para calcular la proyección de un vector  $b$  a  $W$  consiste en determinar una base de  $W$ , construir la matriz  $B$  correspondiente, resolver las ecuaciones normales, y luego  $P(b) = Bx$ . Un método alternativo consiste en calcular la proyección  $Q(b)$  de  $b$  a  $W^\perp$  y luego  $P(b) = b - Q(b)$ . Como  $\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^T))^\perp$  tenemos que la proyección de  $b_2$  al  $\text{Ker}(A)$  es

$$Q(b) = b_2 - P(b) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4/23 \\ -2/23 \\ -32/23 \\ 28/23 \\ -32/23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19/23 \\ 2/23 \\ 32/23 \\ 18/23 \\ -14/23 \end{bmatrix}$$

### 1.2.2 Ejercicio 2

Calcule la proyección de  $b = [1 \ -2 \ 1 \ 1]^T$  al hiperplano por el origen  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ .

**Solución:**

El subespacio  $W$  al que proyectamos es  $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} = \langle [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \rangle^\perp$ . En este caso  $\dim(W^\perp) = 1$  y  $\dim(W) = 3$ . Por lo tanto resulta más conveniente calcular la proyección  $Q(b)$  de  $b$  en  $W^\perp$  y luego la proyección de  $b$  en  $W$  es  $P(b) = b - Q(b)$ .

Una base de  $W^\perp$  es  $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Por lo tanto la matriz  $B$  tiene una sola columna y es  $B = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Las ecuaciones normales  $B^T Bx = B^T b$  son  $4x = 1$ , por lo tanto  $x = 1/4$  y entonces

$$Q(b) = Bx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1/4 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la proyección de  $b$  en  $W$  es

$$P(b) = b - Q(b) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1/4 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -9/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Note que el cálculo de  $P(b)$  a partir de una base de  $W$  requiere en este caso resolver un sistema de  $3 \times 3$ .

## 2 Matrices de Proyección

### 2.1 La Materia

El operador  $P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que asocia a cada vector  $b \in \mathbb{R}^n$  su proyección ortogonal  $P_W(b)$  a un subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  es un operador lineal y por lo tanto existe una matriz  $P_W$  tal que  $P_W(b) = P_W b$ . Usamos el mismo nombre  $P_W$  tanto para la matriz como para el operador, identificando al operador con su matriz que la representa con respecto a las bases canónicas. Como  $P_W(b) = Bx$  donde  $B^T Bx = B^T b$  tenemos que  $P_W(b) = B(B^T B)^{-1} B^T b$  y por lo tanto

$$P_W = B(B^T B)^{-1} B^T$$

. La matrix  $B$  es cualquier matriz tal que sus columnas sean base de  $W$ . Como la matriz que representa a una TL es única, tenemos que la matriz  $B(B^T B)^{-1} B^T$  no depende la base elegida para  $W$ .

## 2.2 Propiedades

Las propiedades más relevantes de las matrices de proyección son

1. Suponga que  $A$  y  $B$  son matrices tal que sus columnas son bases de  $W$ , (es decir tenemos dos bases distintas de  $W$ , una en las columnas de  $A$  y otra en las columnas de  $B$ ). Entonces,  $P_W = B(B^T)^{-1} B^T = A(A^T A)^{-1} A^T$ . Es decir independientemente de la base de  $W$  que se elija la fórmula  $B(B^T B)^{-1} B^T$  permanece invariante.
2.  $Im(P_W) = W$ ,  $Ker(P_W) = W^\perp$  y por lo tanto  $r(P_W) = \dim(W)$  y  $\dim(Ker(P_W)) = \dim(W^\perp)$ .
3. La matriz de proyección a  $W^\perp$  es  $P_{W^\perp} = I - P_W$  (pues  $w^\perp = b - w = b - P_W(b) = (I - P_W)(b)$ )
4.  $P$  es matriz de proyección ortogonal sii  $P^2 = P$ ,  $P^T = P$ . En caso que  $P$  sea matriz de proyección entonces  $P$  es la proyección al espacio columna de  $P$ .
5. Si se elige una base ortonormal de  $W$  entonces  $B^T B = I$  y por lo tanto  $P_W = B(B^T B)^{-1} B^T = B I B^T = B B^T$ , es decir

$$P_W = B B^T$$

## 2.3 Observaciones

1. No es eficiente calcular la matriz de proyección para calcular la proyección de un vector específico. En vez se resuelven las ecuaciones normales  $B^T B x = B^T b$  y luego  $P_W(b) = B x$ .
2. Si las columnas de  $B$  son base ortonormal de  $W$  entonces  $B^T B = I$  pero esto no implica que  $B B^T = I$ . Por ejemplo. considere

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

3. La matriz  $B$  en general no es cuadrada y por lo tanto  $B$  no tiene inversa. Si  $B$  tiene sus columnas l.i. entonces tiene inversa por la izquierda pero nunca tiene inversa por la derecha.
4. Puesto que  $P_W = I - P_{W^\perp}$ , a veces resulta más conveniente calcular la matriz de proyección a  $W^\perp$  y luego restar a la identidad esta matriz. Esto es particularmente apropiado cuando  $\dim(W)$  es mucho mayor que  $\dim(W^\perp)$ .

### 2.3.1 Ejercicio 3

Calcule la matriz de proyección a al espacio  $x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ .

**Solución:**

En este caso  $W = \text{Ker}(C)$  donde  $C = [1 \ 1 \ -1 \ -2]$  y por lo tanto  $W^\perp = \langle [1, 1, -1, -2] \rangle^T$ . Entonces  $\dim(W) = 3$  y  $\dim(W^\perp) = 1$  y es más conveniente proyectar a  $W^\perp$ . Una base de  $W^\perp$  es  $\{[1, 1, -1, 2]^T\}$ , por lo tanto la matriz  $B$  que consideramos es  $B = [1, 1, -1, 2]^T$ . La matriz de proyección en  $W^\perp$  es

$$\begin{aligned}
 P_{W^\perp} &= B(B^T B)^{-1} B^T \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} (7)^{-1} [1 \ 1 \ -1 \ -2] \\
 &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ -1 \ -2] \\
 &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_W = I - P_{W^\perp} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$



## 3 Mínimos Cuadrados

### 3.1 La Materia

Sea  $A$  de  $m \times n$ . El problema de Mínimos cuadrados consiste en determinar la mejor solución del sistema de ecuaciones  $Ax = b$ , es decir, determinar  $x^*$  tal que

$$\|Ax^* - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

Sea  $Ax^* = P(b)$  donde  $P(b)$  es la proyección de  $b$  en  $W = \text{Im}(A)$ . Entonces  $b - P(b) = b - Ax^*$  es perpendicular a  $\text{Im}(A)$  y por lo tanto  $b - Ax^*$  es perpendicular a  $Ax^* - Ax$  para todo  $x$ . Por Pitágoras tenemos entonces

$$\|b - Ax^*\|^2 + \|Ax^* - Ax\|^2 = \|(b - Ax^*) + (Ax^* - Ax)\|^2 = \|b - Ax\|^2$$

y por lo tanto

$$\|b - Ax^*\|^2 \leq \|b - Ax\|^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Tenemos que  $b - Ax^*$  es perpendicular a  $\text{Im}(A)$  sii  $b - Ax^*$  es perpendicular a las columnas de  $A$  sii  $b - Ax^*$  es perpendicular a las filas de  $A^T$  sii  $A^T(b - Ax^*) = \vec{0}$  sii  $A^T Ax^* = A^T b$ .

Por lo tanto el problema de mínimos cuadrados es el mismo que el de proyecciones. En el caso de una proyección se enfatiza  $P(b) = Ax$  y en el caso de mínimos cuadrados se enfatiza el vector  $x$ .

La única diferencia entre proyecciones y mínimos cuadrados radica en que la proyección  $P(b)$  es siempre única, en cambio la solución  $x$  de mínimos cuadrados puede ser única o nó. Si las columnas de  $A$  son linealmente independientes entonces existe un único  $x$  tal que  $P(b) = Ax$ . En cambio si las columnas de  $A$  son l.d. entonces el sistema  $P(b) = Ax$  es consistente y tiene infinitas soluciones. Esto se manifiesta en que cuando las columnas de  $A$  son l.i. las ecuaciones normales  $A^T Ax = A^T b$  tienen una matriz de coeficientes  $A^T A$  positiva definida y por lo tanto invertible. Sin embargo cuando las columnas de  $A$  son l.d. entonces  $A^T A$  es sólo semi-positiva definida y no tiene inversa y el sistema  $A^T Ax = A^T b$  tiene infinitas soluciones. Para todas las soluciones se tiene  $P(b) = Ax$  (es decir,  $Ax$  se mantiene constante para los vectores  $x$  que son solución de  $A^T Ax = A^T b$ ).

## 3.2 Cálculo de Solución de Mínimos Cuadrados

Para determinar la mejor solución de un sistema  $Ax = b$  por mínimos cuadrados:

- Se construyen las ecuaciones normales  $A^T Ax = A^T b$ .
- Se resuelve este sistema. Si las columnas de  $A$  son l.i. el sistema tiene solución única. Si las columnas de  $A$  son l.d. entonces las ecuaciones normales tienen infinitas soluciones y hay infinitos  $x$  que minimizan  $\|Ax - b\|$ . En todos los casos la proyección de  $b$  en  $Im(A)$  es  $P(b) = Ax$ .

### 3.2.1 Ejercicio 4

Determine la solución de mínimos cuadrados del sistema  $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

Las ecuaciones normales  $A^T Ax = A^T b$  son:

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es

$$x = \begin{bmatrix} -12/23 \\ 17/69 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución de mínimos cuadrados es  $x = [-12/23, 17/69]^T$  y la proyección de  $b$  al espacio columna de  $A$  es

$$P(b) = Ax = \begin{bmatrix} -2/69 \\ 53/69 \\ -7/23 \\ -55/69 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Ejercicio 5

Determine el mínimo de la siguiente expresión:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (2 - x_1 + x_2)^2 + (1 + x_1 + x_2)^2 + (3 - x_1 - 2x_2)^2$$

**Solución:**

Puesto que

$$(2 - x_1 + x_2)^2 + (1 + x_1 + x_2)^2 + (3 - x_1 - 2x_2)^2 = \|Ax - b\|^2$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tenemos que el problema de minimización planteado es equivalente a es un problema de solución de un sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados.

Las ecuaciones normales  $A^T Ax = A^T b$  son

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

cuya solución es  $x = [9/7, 1/14]^T$ .

### 3.2.3 Ejercicio 6

Determine la mejor solución de  $Ax = b$  y la proyección de  $b$  en  $Im(A)$  para el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

En este caso tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales  $A^T Ax = A^T b$  son

$$\begin{bmatrix} 14 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reducimos la matriz ampliada  $[A^T A | A^T b]$  a su forma escalonada obteniendo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 14 & 9 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Por lo tanto este sistema tiene infinitas soluciones y entonces la matriz  $A$  tiene sus columnas l.d. Tomando como variable libre a  $x_3$  y como básicas a  $x_1, x_2$  obtenemos que la solución general de las ecuaciones normales es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$P(b) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{para todo } x_3$$

La proyección de  $b$  en  $Im(A)$  es  $P(b) = [-1/3, 2/3, 1/3]^T$ .

### 3.2.4 Ejercicio 7

Determine el polinomio de grado 2 que interpola los siguientes datos:  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$ .

$x_i$	0	1	2
$y_i$	1	3	7

**Solución:**

Sea  $p(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ . Las condiciones de interpolación  $y_i = p(x_i)$  imponen las condiciones:

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 \\ 3 &= c_2 + c_1 + c_0 \\ 7 &= 4c_2 + 2c_1 + c_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos resolver la ecuación  $Ac = b$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema obtenemos  $c = [1, 1, 1]^T$ . Por lo tanto el polinomio de interpolación es  $P(x) = x^2 + x + 1$ .

### 3.2.5 Ejercicio 8

(Continuación del anterior). Suponga que a las condiciones de interpolación del problema anterior se agregan condiciones adicionales. En este caso no existe un polinomio de grado 2 que pase por los puntos especificados y se busca el polinomio de ajuste de mínimos cuadrados.

Determine el polinomio de grado 2 que resuelve el problema de minimización:

$$\min_{p \in \mathbb{P}_2} \sum_{i=5} (y_i - p(x_i))^2$$

donde los datos son:

$x_i$	0	1	2	3	4
$y_i$	1	3	7	9	20

Grafique los datos, el polinomio de interpolación de ejercicio 3.2.4 y el de mínimos cuadrados.

**Solución:**

Sea  $p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ . El problema de minimización es entonces

$$\min_{c_2, c_1, c_0} \sum_{i=1}^5 (y_i - c_2x_i^2 - c_1x_i - c_0)^2$$

Este problema es equivalente a resolver el siguiente sistema  $Ac = b$  por mínimos cuadrados.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores correspondientes a  $x_i, y_i$  obtenemos el sistema

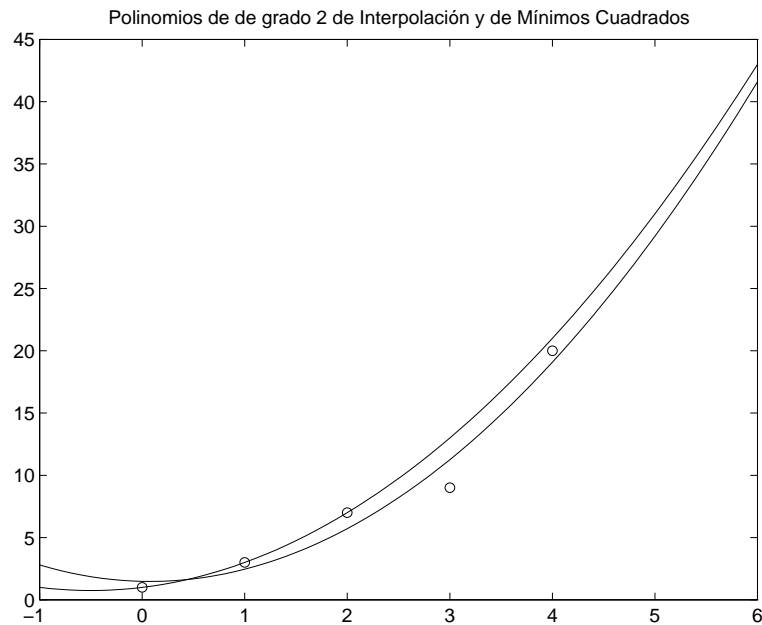
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales  $A^T A c = A^T b$  para este sistema sobredeterminado son

$$\begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 \\ 124 \\ 40 \end{bmatrix}$$

La solución es  $c = 8/7, -6/35, 52/35]^T$ . Por lo tanto el polinomio que mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados es  $p(x) = 8/7x^2 - 6/35x + 52/35$ .

El gráfico que incluye los datos, el polinomio de interpolación y el de ajuste de mínimos cuadrados es el siguiente.



Observe que el cuarto dato no corresponde a un modelo cuadrático. Si se supiera de antemano que los datos corresponden a uno cuadrático entonces se debería eliminar este dato (dato erróneo).

### 3.2.6 Ejercicio 9

Determine la recta de mínimos cuadrados  $y = mx + n$

$$\min_{m,n} \sum_{i=1}^6 (y_i - mx_i - n)^2$$

para los datos:

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$y_i$	1	1.9	3.1	4.3	4.8	6.1

Grafique los datos y la recta.

**Solución:**

El problema de minimización

$$\min_{m,n} \sum_{i=1}^5 (y_i - mx_i - n)^2$$

es equivalente a resolver el siguiente sistema  $Ac = b$  por mínimos cuadrados.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ x_6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores correspondientes a  $x_i, y_i$  obtenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 19/10 \\ 31/10 \\ 43/10 \\ 24/5 \\ 61/10 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales  $A^T Ac = A^T b$  para este sistema sobredeterminado son

$$\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 707/10 \\ 106/5 \end{bmatrix}$$

La solución es  $c = [177/175, 211/210]^T$ . Por lo tanto el polinomio que mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados es  $p(x) = 177/175x + 211/210$ .

El gráfico que incluye los datos y la recta de mínimos cuadrados es el siguiente.

