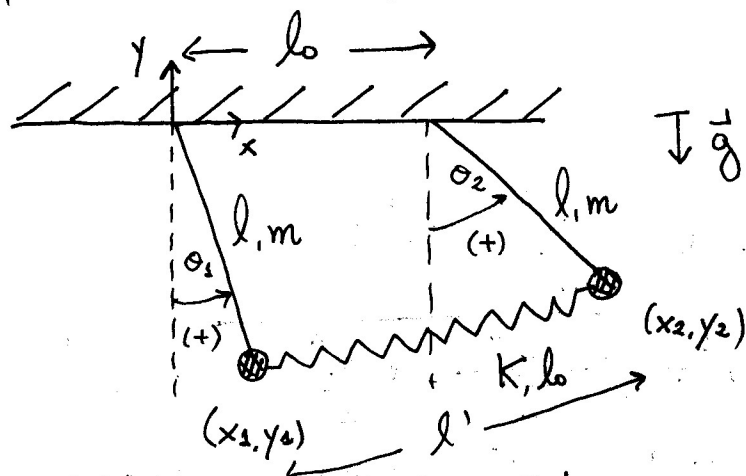


# Pequeñas Oscilaciones

1/7



$$x_1 = l \sin \theta_1$$

$$y_1 = -l \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_0 + l \sin \theta_2$$

$$y_2 = -l \cos \theta_2$$

Nota:  $\theta_1$  y  $\theta_2$  pueden ser positivos y negativos

Estudiamos las peg. oscilaciones del sistema en torno al eq. natural  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

Rápidamente podemos ver que el lagrangeano es:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 + mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2 - \frac{1}{2} K (l' - l_0)^2$$

$$\text{con } l' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \left[ (l_0 + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow l' = l \left[ (l_0/l + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \frac{K}{2} \left( l \left[ (l_0/l + \sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 \right]^{1/2} - l_0 \right)^2$$

Ahora que tenemos el lagrangeano normal, encontremos el lagrangeano de peg. oscilaciones

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_1^{eq} + \tilde{\theta}_1, \quad |\tilde{\theta}_1| \ll 1$$

$$\theta_2 = \theta_2^{eq} + \tilde{\theta}_2, \quad |\tilde{\theta}_2| \ll 1$$

$$\text{pero } \theta_1^{eq} = 0 = \theta_2^{eq}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \tilde{\theta}_1$$

$$\theta_2 = \tilde{\theta}_2$$

Por notación sigamos trabajando con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  pero 2/7  
 sujeto a:  $|\theta_1| \ll 1$   
 $|\theta_2| \ll 1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} \left[ l \sqrt{(l/l + \theta_2 - \theta_1)^2 + \left( 1 - \frac{\theta_2^2}{2} - 1 + \frac{\theta_1^2}{2} \right)^2} - l_0 \right]^2$$

ya que:  $\sin \theta \approx \theta$  y  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  cuando  $|\theta| \ll 1$ .

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} \left[ l \sqrt{(l/l + \theta_2 - \theta_1)^2 + \underbrace{\left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right)^2}_{(*)}} - l_0 \right]^2$$

El lagrangeano de peq. oscilaciones sólo debe tener términos de hasta orden 2. Notar que el término (\*) es de orden 4, es por esto que lo descartamos. (aunque esté dentro de la raíz, luego participa cuando se eleva al cuadrado)

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m g l \left( 2 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{k}{2} [l(l/l + \theta_2 - \theta_1) - l_0]^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{m g l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{k}{2} l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + 2 m g l$$

Además, debido a que las ecs. de mov o de Lagrange provienen de derivar el lagrangeano c/r a  $\dot{\theta}_i$  i  $\theta_i$  la cte.  $2 m g l$  la podemos eliminar, obteniéndose:

$$\mathcal{L}^{[2]} = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{m g l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{k l^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 = \sum_{i,j} \left( \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{V_{ij}}{2} q_i q_j \right)$$

Reconozcamos las matrices  $K_{ij}$ ,  $V_{ij}$ .

3/7

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + 0 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 0 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2$$

$$\Rightarrow K_{ij} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow mgl \left( -\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} \right) - \frac{b}{2} l^2 (\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) &= -\theta_1^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad - \theta_2^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad + bl^2 \theta_1 \theta_2 \rightarrow \text{término simétrico} \\ &= \theta_1^2 \left( -\frac{mgl + bl^2}{2} \right) - \theta_2^2 \left( \frac{mgl + bl^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{bl^2}{2} \theta_1 \theta_2 + \frac{bl^2}{2} \theta_2 \theta_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ij} = \begin{bmatrix} (mgl + bl^2) & -bl^2 \\ -bl^2 & (mgl + bl^2) \end{bmatrix}$$

¿Que hay sobre las ecs. de mov?

Notar que  $\mathcal{L}^{[2]} = \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{V_{ij}}{2} q_i q_j$

permite que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^{[2]}}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 0 \quad \text{Sean:}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \delta_{ib} \dot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_i \delta_{jb} \right\} - \left\{ \sum_{i,j} \frac{V_{ij}}{2} \delta_{ib} q_j + \sum_{i,j} \frac{V_{ij}}{2} q_i \delta_{jb} \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_j \frac{K_{jb}}{2} \dot{q}_j + \sum_i \frac{K_{ib}}{2} \dot{q}_i \right\} - \left\{ \sum_j \frac{V_{jb}}{2} q_j + \sum_i \frac{V_{ib}}{2} q_i \right\} = 0$$

podemos renombrar  $i \rightarrow j$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j \frac{K_{ji}}{2} \dot{q}_j + \sum_j \frac{K_{ij}}{2} \dot{q}_j \right\} - \left\{ -\sum_j \frac{V_{ji}}{2} q_j - \sum_j \frac{V_{ij}}{2} q_j \right\} = 0$$

pero además al dejar  $\mathcal{L}^{[2]}$  de orden 2 nos garantizamos que  $K_{ij}$  y  $V_{ij}$  son simétricos

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j K_{ji} \dot{q}_j \right\} + \sum_j V_{ji} q_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j (K_{ji} \ddot{q}_j + V_{ji} q_j) = 0$$

en nuestro caso

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución a este sistema de ecuaciones?

Estamos en búsqueda de las coord. normales o modos propios de oscilación del sistema, para esto podemos suponer que oscilan con la misma frecuencia pero con distinta amplitud.

para esto suporemos:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

↓  
indep del tiempo, son amplitudes que se despegan con las cond. iniciales

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \cdot -\omega^2 + \begin{bmatrix} mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debemos resolver para  $\omega$ :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 & -bl^2 \\ -bl^2 & -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{IM} \quad \checkmark \quad \det IM = 0$$

$$\det IM = 0 \Rightarrow$$

$$(-ml^2\omega^2 + mgl + bl^2)^2 - b^2l^2 = 0$$

$$\Rightarrow -ml^2\omega^2 + mgl + bl^2 = \pm bl$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} = \pm \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{b}{m} \mp \frac{b}{m}}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2b}{m}}}$$

frec. de oscilación "naturales"  
del sistema

Ahora calculemos los modos de oscilación:

si tomamos  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  y reemplazamos en (\*)

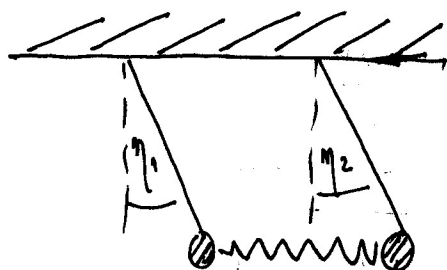
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 &= 0 \\ -\eta_2 + \eta_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = \eta_2}$$

$\Rightarrow$  oscilación "sincronizada"



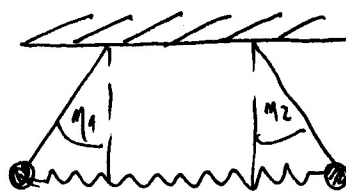
si tomamos  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g+2b}{l}}$  en (\*)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{g}{l} - \frac{2b}{m} + \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{g}{l} - \frac{2b}{m} + \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \\ -\frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_1 = -\eta_2}$$

$\Rightarrow$  oscilación "contraria"



Entonces:

→ Para oscilación "sincronizada" la solución es:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega_1 t} = \begin{pmatrix} \eta_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)) \\ \eta_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)) \end{pmatrix}$$

→ Para oscilación "contraria":

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \cos(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)) \\ \eta_2 \cos(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)) \end{pmatrix}$$

Debido al principio de superposición de soluciones (EDO) obtenemos que la solución general es:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)) - \eta_2 \cos(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)) \\ \eta_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)) + \eta_2 \cos(\sqrt{\frac{g+2b}{l} \cdot \frac{1}{m}}(t-t_1)) \end{pmatrix}$$