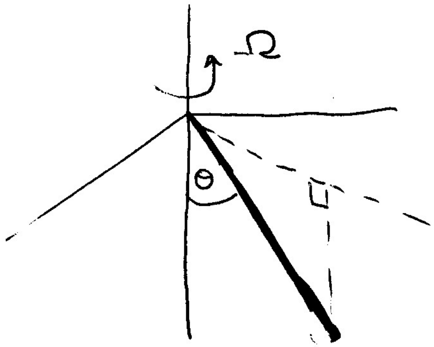
Ejercicio 4.6.7



Debemos encontrar la ec. de mov. para el ángulo θ, único grado de libertad del péndulo.

Sabemos que:

$$L = T - V$$

y que la energía cinética de un sólido rígido se puede escribir cómo:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}_0^{\,2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{traslación}\\ \text{pto. 0}}} + \underbrace{M \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_{CM}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{mov. del}\\ \text{cm c/r al}\\ \text{pto 0.}\\ \vec{V}_{CM}\text{, veloc}\\ \text{del CM c/r}\\ \text{al pto 0.}}} + \underbrace{\frac{\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega}}{2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{rotación}\\ \text{en torno}\\ \text{al pto 0.}}}$$

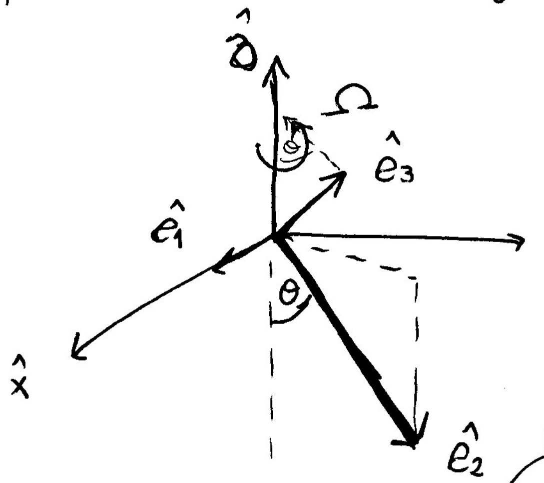
Si tomamos como ref. el pto 0 = CM tendríamos:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^{\,2}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{traslación}\\ \text{CM}}} + \underbrace{\frac{\vec{L}_{CM} \cdot \vec{\omega}}{2}}_{\substack{\text{rotación}\\ \text{entorno}\\ \text{al CM.}}}$$

En nuestro caso nos conviene tomar el pto 0 como el pto que está fijo $\Rightarrow \vec{V}_0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{\vec{L}_0 \cdot \vec{\omega}}{2} = \frac{\overleftrightarrow{I}_0 \vec{\omega}^2}{2}}$

pero $\overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 :=$ matriz de Inercia c/r a O.

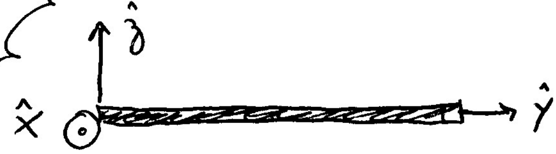
Debemos escoger nuestro sistema de coordenadas. Sabemos que $\overleftrightarrow{\mathbb{I}}$ es diagonal en los ejes principales de todo cuerpo, sean estos ejes $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ (solidarios a la barra)



en estos ejes:

$$\overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ML^2 \end{bmatrix}$$

ya que:



$$\mathbb{I}_{xx} = \int dm\,(y^2+z^2)$$

$$= \int \rho\, dl\,(y^2+z^2)$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int \frac{M}{L}(y^2+z^2)\,dy$$

pero $z=0$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{xx} = \int_0^L \frac{M}{L} y^2\, dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_{xx} = \frac{1}{3}ML^2}$$

y nos falta $\vec{\omega}$ en las coordenadas $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$.

Es claro que:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_1 + (-\Omega\cos\theta)\,\hat{e}_2 + \Omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{3}ML^2\left(\dot{\theta}\,\hat{e}_1 + \Omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_3\right)$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 \cdot \vec{\omega}^2 = \frac{1}{3}ML^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{6}ML^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right)}$$

y V si imponemos $U_g = 0$ en el plano xy será:

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$ ya que corresponde a la energía potencial del CM.

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{6}ML^2(\dot\theta^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2\theta) + Mg\frac{L}{2}\cos\theta}$$

Ahora: las ecs. de Euler nos dicen que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

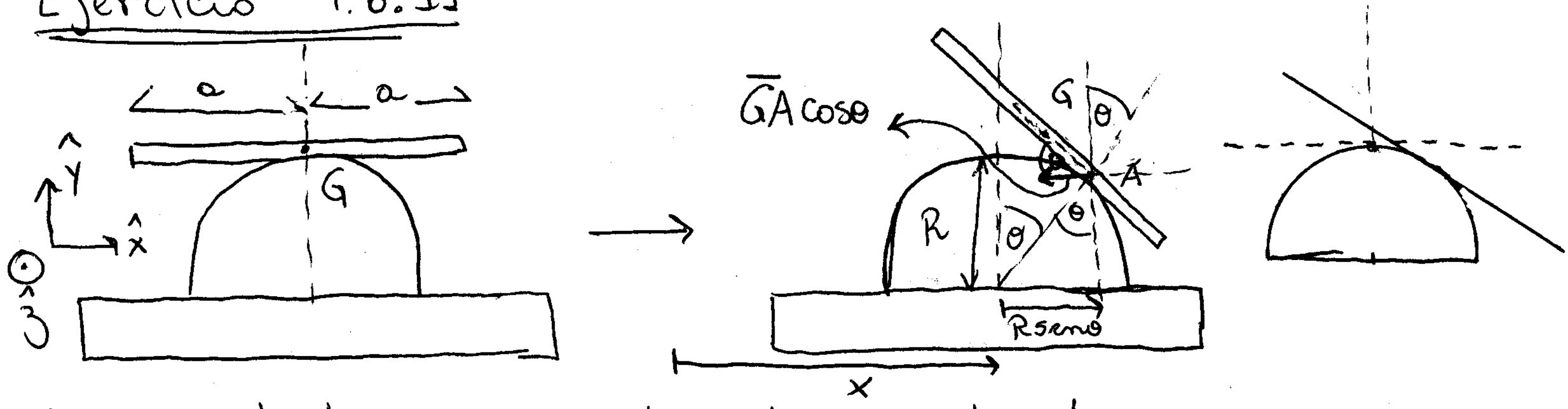
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ML^2\dot\theta\right) - \left(\frac{ML^2}{3}\Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot\theta - \frac{1}{6}\Omega^2 \operatorname{sen}2\theta + \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{ML^2}\ddot\theta = \frac{\cancel{ML^2}\Omega^2}{2}\operatorname{sen}2\theta - \frac{3}{2}\cancel{M}g\cancel{L}^{-1}\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{1}{2}\Omega^2 \operatorname{sen}2\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta}$$

Ejercicio 4.6.11



Lo importante es escribir bien el Lagrangeano. Notemos que los grados de libertad son la coordenada "x" que se mueve el hemisferio y el ángulo "θ" que genera la barra en su vaivén c/r al centro del hemisferio.

Entonces, partamos por encontrar $\vec{V}_G = \vec{V}_{cm}$ de la barra.

$$X_G = X + R\sin\theta - \overline{GA}\cos\theta$$

- X: lo que se movió el hemisferio
- $+$: más el mov. de la barra sobre el hemisferio
- $R\sin\theta$: distancia desde centro hemisferio hasta A
- $-$: menos la dist que me pasó
- $\overline{GA}\cos\theta$: distancia desde A hasta G según X.

notar que $\overline{GA}$ debido a que la barra no desliza es igual al arco abarcado por el ángulo "θ", esto se debe a que la barra se apoya sobre el hemisferio pto a pto.

$$\Rightarrow \overline{GA} = R\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{X_G = X + R\sin\theta - R\theta\cos\theta}$$

Del mismo modo calculamos

$$y_G = \underbrace{R\cos\theta}_{\substack{\text{altura} \\ \text{pto. A}}} + \underbrace{R\theta\,\text{sen}\theta}_{\substack{\text{altura G} \\ \text{c/r a A.}}}$$

y como necesitamos $T \Rightarrow$ necesitamos $\dot{x}_G, \dot{y}_G$

$$\Rightarrow \dot{x}_G = \dot{x} + R\cos\theta\,\dot\theta - R\dot\theta\cos\theta + R\theta\,\text{sen}\theta\,\dot\theta = \dot{x} + R\theta\,\text{sen}\theta\,\dot\theta$$

$$\dot{y}_G = \cancel{-R\,\text{sen}\theta\,\dot\theta} + \cancel{R\dot\theta\,\text{sen}\theta} + R\theta\cos\theta\,\dot\theta = R\theta\dot\theta\cos\theta.$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2}_{\substack{\text{energía} \\ \text{hemisferio}}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \left[(\dot{x} + R\theta\,\text{sen}\theta\,\dot\theta)^2 + R^2\theta^2\dot\theta^2\cos^2\theta \right]}_{\substack{\text{energía traslación} \\ \text{CM barra}}}$$

$$+ \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_{CM}\, \vec{\omega}^2$$

Este problema ocurre sólo en 2D $\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_{CM} \longrightarrow I_{CM}$

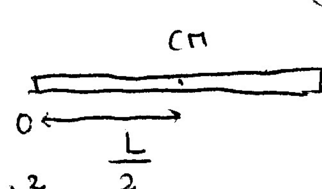
hemos elegido CM como pto. de rotación $\Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12} M (2a)^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{1}{3} M a^2}$$

y notar que $\vec{\omega} = \dot\theta\,\hat{z}$

Sabemos que cuando una barra rota c/r a un extremo, su momento de inercia es: $I = \frac{1}{3} M L^2$ pero si aplicamos Teo. de Steiner:

$$I^{O} = M \left(\substack{\text{distancia paralela} \\ \text{al eje de rotación} \\ \text{"CM"}} \right) + I^{CM}$$



Entonces: $I^{CM} = I^{O} - M\,\text{dist}$

$$\Rightarrow I^{CM} = \frac{1}{3} M L^2 - M \frac{L^2}{4} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + 2R\theta \dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + R^2 \theta^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{6} M a^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + 2R\theta \dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + R^2 \theta^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{6} M a^2 \dot{\theta}^2 - Mg(R\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta) - Mg \cdot \text{algo}$$

Notar que $Mg(R\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta)$ corresponde a la energía potencial del CM de la barra y que $Mg\,\text{algo}$ al potencial del CM del hemisferio. He puesto "algo" que corresponde a la altura del CM pero fijarse que es cte. por lo cual, cuando busque las ecuaciones de Lagrange esa algo no contribuye en nada.

Entonces:

Ecuaciones para x:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + M\dot{x} + MR\theta\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right) = 0$$

$$\Rightarrow 2M\dot{x} + MR\theta\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta = \text{cte.}$$

$$\text{ó} \quad 2M\ddot{x} + MR\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + MR\theta\ddot{\theta} \operatorname{sen}\theta + MR\theta\dot{\theta}^2 \cos\theta = 0$$

Ecuaciones para θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MR\theta\dot{x} \operatorname{sen}\theta + MR^2\theta^2\dot{\theta} \right) = MR\dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta +}$$

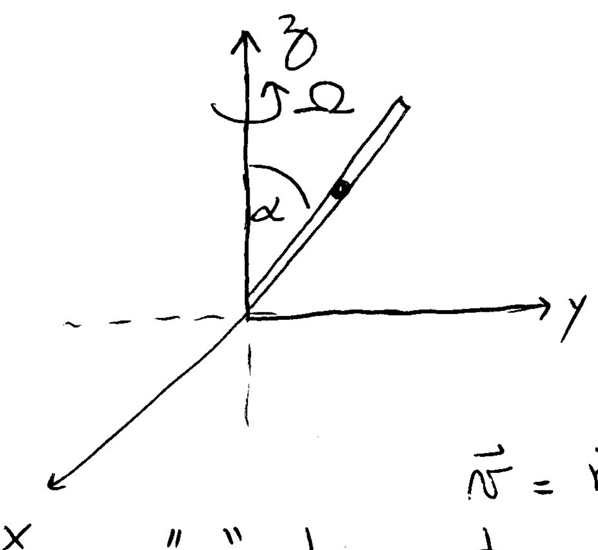
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MR\theta\dot{x}\operatorname{sen}\theta + MR^2\theta^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta} \right)$$

$$= MR\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + MR^2\theta\dot{\theta}^2 + \cancel{MgR\operatorname{sen}\theta}$$
$$- \cancel{MgR\operatorname{sen}\theta} - MgR\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow MR\dot{\theta}\,\text{[redacted]}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + MR\,\text{[redacted]}\cos\theta\dot{\theta} + 2MR^2\theta\dot{\theta}^2 + MR^2\theta^2\ddot{\theta}$$
$$+ \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta} = MR\,\text{[redacted]}\operatorname{sen}\theta + MR\theta\,\text{[redacted]}\cos\theta + MR^2\theta\dot{\theta}^2$$
$$- MgR\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow MR\theta\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + 2MR^2\theta\dot{\theta}^2 + MR^2\theta^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta}$$
$$= MR^2\theta\dot{\theta}^2 - MgR\theta\operatorname{sen}\theta$$

Ejercicio 4.6.12



Además calculemos la Normal que el tubo ejerce sobre la bolita.

→ Las coordenadas naturales a este problema son las coordenadas esféricas donde:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

"r" claramente es nuestro grado de libertad, $\dot{\phi}$ claramente es $\Omega = cte$ y "θ" está fijo pero para calcular la normal lo dejaremos inicialmente como grado de libertad para poder encontrar la Normal en esa dirección.

Entonces:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\Omega\operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta + \underbrace{\lambda(\theta-\alpha)}_{\text{constricción}}$$

<u>ecuación para</u> r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) = mr\Omega^2\operatorname{sen}^2\theta + mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} = mr\left(\Omega^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - mg\cos\theta \quad (1)$$

<u>ecuación para θ</u>:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = mr^2\Omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + mgr\operatorname{sen}\theta + \lambda$$

$$\Rightarrow 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr^2\Omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + mgr\operatorname{sen}\theta + \lambda \quad (2)$$

ecuación para λ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow 0 = \theta - \alpha \Rightarrow \boxed{\theta = \alpha} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0}$$

reemplazamos (*) en (1) y (2)

$$\Rightarrow \boxed{0 = mr^2\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + mgr\operatorname{sen}\alpha + \lambda} \quad (2.a)$$

de aquí despejamos (λ = Normal)

$$\Rightarrow m\ddot{r} = mr(\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha) - mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = r\Omega^2\operatorname{sen}^2\alpha - g\cos\alpha} \quad (2.b)$$

Queda propuesto hacer u encontrar la normal según $\hat{\phi}$, la constricción necesaria es : $\lambda^2(\phi - \Omega t)$, y encontrar las ecuaciones de Lagrange del Lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha) - mgr\cos\alpha + \lambda^2(\phi - \Omega t)$$

(ya podemos poner $\theta = \alpha = cte$)

Continuando con este problema, nos piden dónde la partícula se queda quieta $\Rightarrow \ddot{r} = 0$, $\dot{r} = 0$.

$$\Rightarrow 0 = r^*\Omega^2\operatorname{sen}^2\alpha - g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{r^* = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

y para encontrar la velocidad o rapidez mínima que debe tener para llegar a r^* desde el origen $r=0$ podemos integrar la ec. de mov.

$$\ddot{r} = r\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = r\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow d\dot{r}\,\dot{r} = (r\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - g\cos\alpha)\,dr \qquad \Big/ \int_0^{r^*} \quad \int_{v_0}^{0}$$

desde origen a r^* — veloc inicial crítica para llegar justo a r^*.

$$\Rightarrow \left.\frac{\dot{r}^2}{2}\right|_{v_0}^{0} = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{r^*}\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - g r^*\cos\alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{r^{*2}}{2}\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha - g r^*\cos\alpha$$

$$v_0^2 = -\frac{g^2\cos^2\alpha\,\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\Omega^4 \operatorname{sen}^4\alpha} + \frac{2g\cos\alpha \cdot g}{\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}\cos\alpha$$

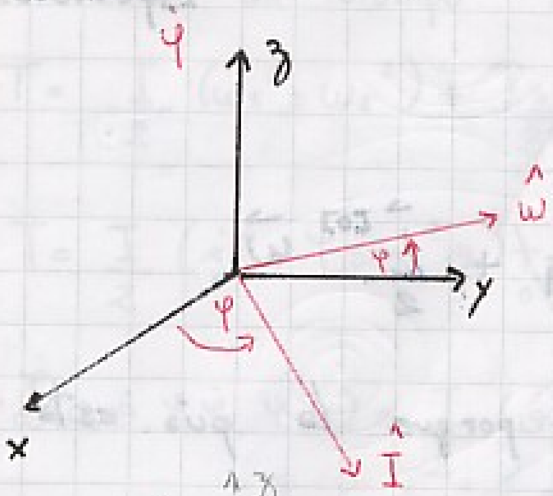
$$v_0^2 = -\frac{g^2\cos^2\alpha}{\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{2g^2\cos^2\alpha}{\Omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{g^2\cot^2\alpha}{\Omega^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{g\cot\alpha}{\Omega}}$$

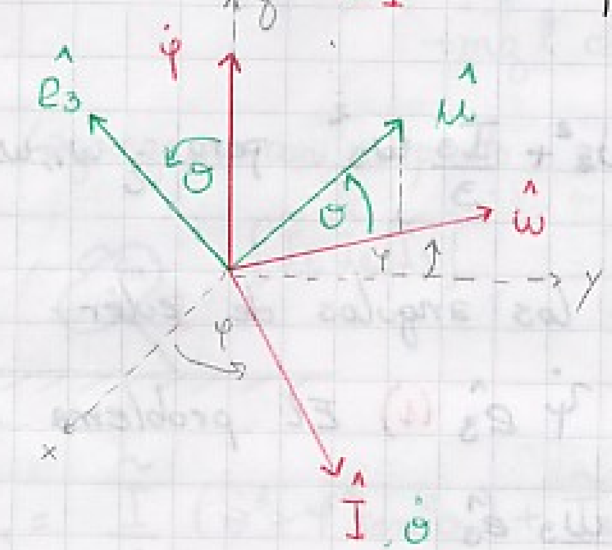
Ángulos de Euler

Por construcción



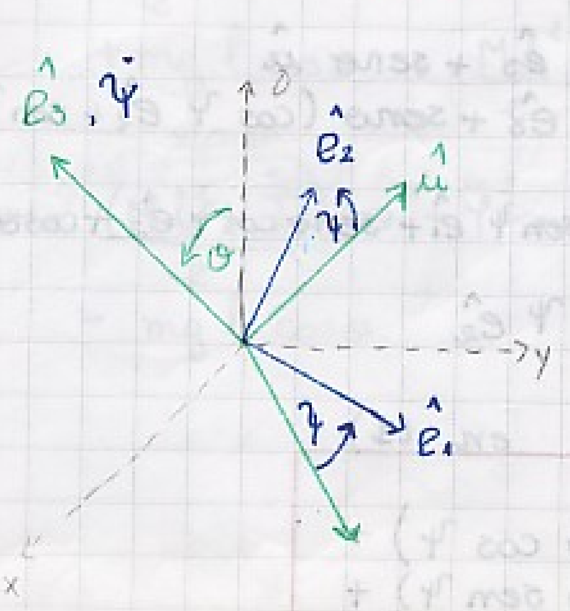
1) Rotar con respecto al eje $\hat{z}$ con velocidad angular $\dot{\varphi}$ donde φ es el ángulo que representa la precesión.

No inercial $\Rightarrow (\hat{I}, \hat{w}, \hat{z})$



2) Rotar con respecto al eje $\hat{I}$ con veloc. angular $\dot{\theta}$ (donde θ representa la nutación

Nutación $\Rightarrow (\hat{I}, \hat{u}, \hat{e}_3)$



3) Rotar con respecto al eje principal $\hat{e}_3$ con velocidad angular $\dot{\psi}$ (psi). ψ representa el spin.

$\Rightarrow (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
ejes principales

Trompo con púa fija (Momentos principales A, A, C y altura h)

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{I} + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$$

pero $\hat{z} = ? = \cos\theta\,\hat{e}_3 + \operatorname{sen}\theta\,\hat{u} = \cos\theta\,\hat{e}_3 + \operatorname{sen}\theta\,(\cos\psi\,\hat{e}_2 + \operatorname{sen}\psi\,\hat{e}_1)$

$\hat{I} = ? = \cos\psi\,\hat{e}_1 - \operatorname{sen}\psi\,\hat{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\hat{e}_1 + (\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi)\,\hat{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\hat{e}_3$$

para acordar notacion con el apunte $\varphi = \phi$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\hat{e}_1 + (\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi)\,\hat{e}_2 + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\hat{e}_3$$

Como ya sabemos:

$T = \frac{1}{2} M \vec{V}_0^{\,2} + M \vec{V}_0 \vec{V}_{cm} + \frac{1}{2} \overline{\overline{I}}_0 \vec{\omega}^{\,2}$, pero si tomamos

O como el pto fijo de la púa.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \overline{\overline{I}}_0 \vec{\omega}^{\,2} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}_{\text{matriz de inercia en los ejes principales } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3} \cdot \vec{\omega}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0 \cdot \vec{\omega} = A(\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\hat{e}_1$$

$$+ A(\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\psi)\,\hat{e}_2$$

$$+ C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathbb{I}}_0\, \vec{\omega}^2 = A(\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 \quad (1)$$

$$+ A(\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\psi)^2 \quad (2)$$

$$+ C(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

$$(1) + (2) \Rightarrow A\Big[\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\psi + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\,\cancel{\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi}\cos\psi + \dot{\theta}^2\cos^2\psi$$

$$+ \dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\psi - 2\dot{\phi}\dot{\theta}\,\cancel{\text{sen}\psi\,\text{sen}\theta}\cos\psi + \dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\psi\Big]$$

$$\Rightarrow A\left[\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}A\left[\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}C\left[\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right]^2$$

y el potencial V: $\quad mgh\cos\theta$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}A\left[\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}C\left[\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right]^2$$

$$- mgh\cos\theta.$$

Ecs. de mov

ψ] Notar que $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = cte = C\cdot(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

de donde se puede definir $\boxed{\dot\phi\cos\theta + \dot\psi = s}$ $(s = cte)$

ϕ] Notar que $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = cte = A\dot\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + C\cos\theta\,(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

$$\Rightarrow \boxed{A\dot\phi\,\mathrm{sen}^2\theta + C s\cos\theta = \alpha} \quad (\alpha = cte)$$

θ] $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(A\dot\theta\right) = A\ddot\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot\phi^2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - C\underbrace{[\dot\phi\cos\theta + \dot\psi]}_{s}\,\dot\phi\,\mathrm{sen}\theta + mgh\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{A\ddot\theta = A\dot\phi^2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - Cs\,\dot\phi\,\mathrm{sen}\theta + mgh\,\mathrm{sen}\theta}$$

Ademas recordemos que la Energía se conserva

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}A\dot\theta^2 + \frac{1}{2}A(\mathrm{sen}^2\theta)\dot\phi^2 + \frac{1}{2}Cs^2 + mgh\cos\theta = cte.$$

$$E = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} A \cancel{(1-u^2)} \frac{(\alpha - Csu)^2}{A^2 (1-u^2)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2} C s^2 + mghu$$

$$\Rightarrow 2E(1-u^2) = A\dot{\theta}^2 (1-u^2) + \frac{(\alpha - Csu)^2}{A} + Cs^2(1-u^2) + 2mghu(1-u^2)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 (1-u^2) = (2E - Cs^2 - 2mghu)\frac{(1-u^2)}{A} - \frac{(\alpha - Csu)^2}{A^2}$$

pero $(1-u^2) = (1-\cos^2\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 (1-u^2) = (\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta)^2 = (\dot{\overline{\cos\theta}})^2 = \dot{u}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{u}^2 = (2E - Cs^2 - 2mghu)\frac{(1-u^2)}{A} - \frac{(\alpha - Csu)^2}{A^2}}$$

si queremos conocer los extremos de nutación del trompo, queremos buscar los $\theta^*_{\text{min y max}}$ en los cuales se cumple $\dot{\theta}^* = 0$

$$\text{si } \dot{\theta}^* = 0 \Rightarrow \dot{u}^{*2} = 0 = f(u^*)$$

$$\Rightarrow (2E - Cs^2 - 2mghu^*)\frac{(1-u^{*2})}{A} - \frac{(\alpha - Csu^*)^2}{A^2} = 0$$