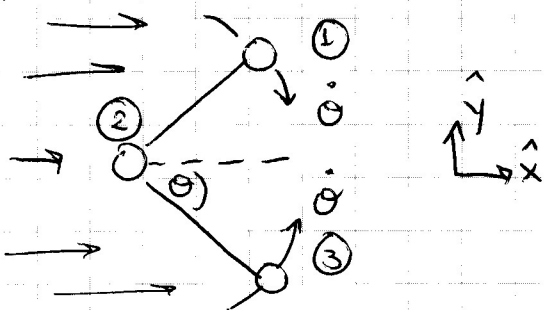
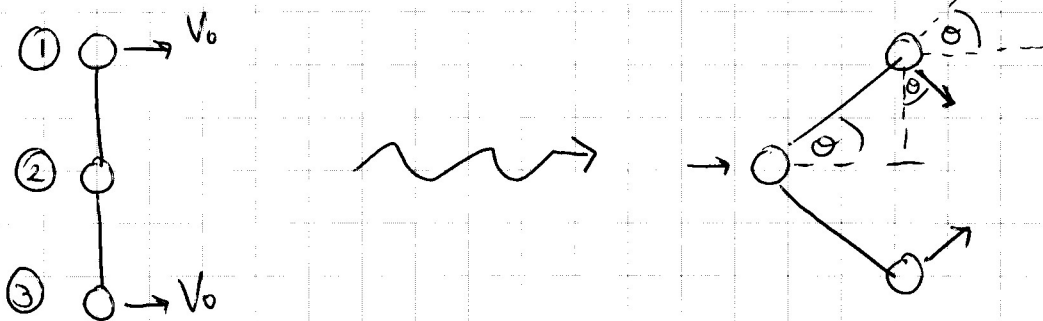


## Ejercicio Adicional

Tomemos en cuenta el ejercicio 1.4.9 y ahora calculemos  $\dot{\theta}(\theta)$ , es decir, la rapidez angular con que se van cerrando las partículas 1 y 3 dir a la partícula 2 en función del ángulo  $\theta$ .



Recordemos que inicialmente:



Entonces:  $\vec{P}_{\text{inicial}} = 2m V_0 \hat{x}$  (ver Ej. 1.4.9)  
 $E_{\text{inicial}} = m V_0^2$

y veamos ahora el momentum y la energía en un tpo. "t" cualquiera. Para esto escribamos las velocidades de ① y ③ en función de la velocidad de la partícula ②.

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + L \dot{\theta} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y})$$

$$\vec{V}_2 = V_2 \hat{x}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + L \dot{\theta} (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$$

Esto nos lleva rápidamente por conservación del momentum  $z$ :

$$2mV_0 \hat{x} = 3V_2 \hat{x} + 2L\dot{\theta} \sin\theta \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \cdot V_0 = 3V_2 + 2L\dot{\theta} \sin\theta} \quad (1)$$

pero  $V_2(t)$ ?

Veamos energía:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{V}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{V}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\vec{V}_3)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 [(V_2 + L\dot{\theta} \sin\theta)^2 + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta] \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2 + \frac{1}{2} m_3 [(V_2 + L\dot{\theta} \sin\theta)^2 + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta] \\ &= m [V_2^2 + 2V_2 L\dot{\theta} \sin\theta + L^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} m V_2^2 \\ E &= \frac{3}{2} m V_2^2 + m [2V_2 L\dot{\theta} \sin\theta + L^2 \dot{\theta}^2] \end{aligned}$$

por conservación de la energía:

$$\Rightarrow \cancel{2m} V_0^2 = \frac{3}{2} \cancel{m} V_2^2 + \cancel{m} [2V_2 L\dot{\theta} \sin\theta + L^2 \dot{\theta}^2]$$

Notar que nuestra incógnita es  $V_2$  ya que obteniendo  $V_2$  como función de  $\dot{\theta}$  y  $\theta$ , cuando reemplacemos en (1) obtendremos una relación entre  $\dot{\theta}$  y  $\theta$  ... c'est fini!!

despejemos...

$$\Rightarrow 3V_2^2 + 4V_2 L \dot{\theta} \sin\theta + 2(L^2 \dot{\theta}^2 - V_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{-4L \dot{\theta} \sin\theta \pm \sqrt{16L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta - 24(L^2 \dot{\theta}^2 - V_0^2)}}{6}$$

Cómo es  $L^2 \dot{\theta}^2 - V_0^2 \geq 0$ ?

En el ejercicio 1.4.9 cuando estudiamos el momento del choque estamos evaluando en un tpo mayor y obteníamos que  $L^2 \dot{\theta}_*^2$  al momento del choque era:  $\sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} V_0$

$$\vee \sqrt{\frac{4}{9}} < 1 \Rightarrow L^2 \dot{\theta}^2 < V_0^2 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow L^2 \dot{\theta}^2 - V_0^2 < 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{-4L \dot{\theta} \sin\theta + \sqrt{16L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + 24(V_0^2 - L^2 \dot{\theta}^2)}}{6}$$

he tomado el signo  $\oplus$  ya que de tomar  $\ominus$   $V_2$  sería menor que cero y no tiene sentido debido a cómo he definido los signos y el mov. del sistema.

$$\text{la ec. (1)} \Rightarrow V_2^2 = \frac{4}{9} \{ V_0^2 - 2L \dot{\theta} \sin\theta V_0 + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \}$$

$$\vee \text{ la raíz} \Rightarrow V_2^2 = \frac{1}{36} \{ 16L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta - 8L \dot{\theta} \sin\theta \sqrt{\frac{4}{9}} V_0 + V_0^2 \}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} \{ V_0^2 - 2L \dot{\theta} \sin\theta V_0 + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \}$$

$$= \frac{1}{36} \{ 32L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + 24(V_0^2 - L^2 \dot{\theta}^2) - 8L \dot{\theta} \sin\theta \sqrt{\frac{4}{9}} V_0 \}$$

$$\Rightarrow V_0^2 \left( \frac{4}{9} - \frac{6}{9} \right) - \frac{8}{9} L \ddot{\theta} \sin \theta V_0 + \left( \frac{4}{9} - \frac{8}{9} \right) L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

$$= -\frac{6}{9} L^2 \dot{\theta}^2 - \frac{2}{9} L \ddot{\theta} \sin \theta \sqrt{v_0}$$

$$\Rightarrow 2V_0^2 + 8L \ddot{\theta} \sin \theta V_0 + 4L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

$$= 6L^2 \dot{\theta}^2 + 2L \ddot{\theta} \sin \theta \sqrt{v_0}$$

$$\Rightarrow L^2 \dot{\theta}^2 (3 - 4 \sin^2 \theta) + L \ddot{\theta} (\sin \theta \sqrt{v_0} - \sin \theta V_0) - V_0^2 = 0$$

Llegamos a una expresión que habría que elevar al cuadrado para sacar la raíz, llegando a una ec. de orden 4... pura matemática. La idea espero se entienda ya que seguir sería puro álgebra.