Ejercicio 1.4.17

Debido a que el cometa se mueve bajo la acción del potencial $V(r) = \frac{k}{r^2}$, la trayectoria está dada por:

$$r(\theta) = \frac{l_0^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}$$

pero por enunciado sabemos que esta trayectoria es una parábola $\Rightarrow e = 1$

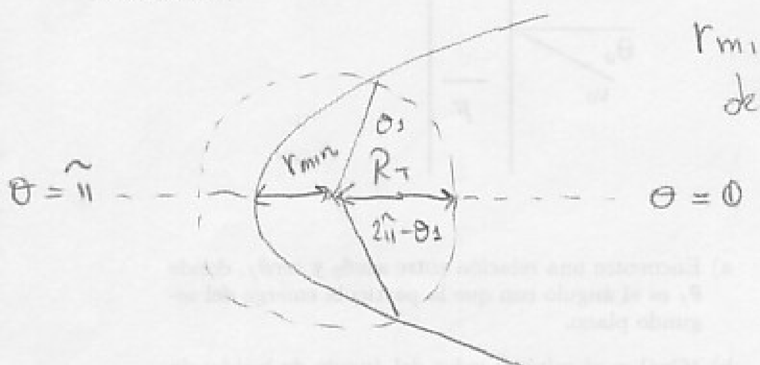
$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{l_0^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 - \cos(\theta - \alpha)}$$

Sabemos además que: $r_{min} = \gamma R_T$ con $\gamma < 1$

<u>Pregunta</u>: ¿a qué ángulo θ corresponde r_{min}??

Veamos:

simplemente podemos imponer $r_{min} \Rightarrow \theta = \pi$ pero debemos despejar α



Sabemos que $r(\theta^*) = r_{min}$; $\dot{r}(\theta^*) = 0$

$$\Rightarrow \dot{r}(\theta) = \frac{l_0^2}{mk} \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha) \cdot \dot{\theta}}{(1 - \cos(\theta - \alpha))^2} = 0 \Bigg|_{\theta^* = \pi}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \cdot \dot{\theta}^* = 0 \qquad \text{pero } \dot{\theta}^* \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = 0$$

$\Rightarrow \alpha \overset{?}{=} \tilde{\pi}$

Veamos:

en $\theta^* = \tilde{\pi}$ para $r(\theta^*) \Rightarrow r(\theta^*) \to \infty$ y no es el caso

otra solución para α es: $\boxed{\alpha = 0}$ ✓✓

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

pero ahora $\theta^* = \tilde{\pi} \Rightarrow r_{min} = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{2\gamma R_T}{1 - \cos\theta}}$$

Cómo podemos calcular el tiempo?

6 Sabemos: $l = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow l = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$

si l es conservado $\Rightarrow l_0 = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{l_0 dt = mr^2 d\theta}$

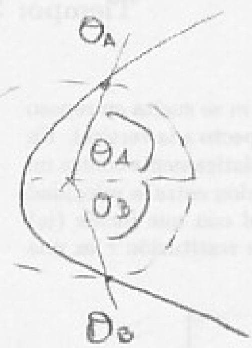
$$\Rightarrow dt = \frac{mr^2 d\theta}{l_0} = \frac{m}{l_0} \frac{(2\gamma R_T)^2}{(1-\cos\theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{m (2\gamma R_T)^2}{\sqrt{2\gamma R_T m k}} \frac{1}{(1-\cos\theta)^2} d\theta$$

$$\Rightarrow t = \frac{m(2\gamma R_T)^2}{\sqrt{2\gamma R_T \cdot m \cdot k}} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

pero $\theta_A = ?$

$\theta_B = ?$



por simetría $\Rightarrow \theta_B = 2\pi - \theta_A$

y además

$$r(\theta_A) = R_T = \frac{2\gamma R_T}{1-\cos\theta_A}$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta_A = 2\gamma$$

$$\Rightarrow \cos\theta_A = 1-2\gamma$$

$$\Rightarrow \cos\theta_B = 1-2\gamma$$

$$\int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{1}{3}\, \frac{\left(1+3\tan^2\frac{\theta_A}{2}\right)}{\tan^3\left(\frac{\theta_A}{2}\right)} = I$$

$$\Rightarrow t = \frac{m(2\gamma R_T)^2}{\sqrt{2\gamma R_T m^2 GM}} \cdot I = \sqrt{\frac{2\gamma R_T}{GM}}\, 2\gamma R_T I$$

pero el periodo de la Tierra es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{pero} \qquad \cancel{m} R_T \omega^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R_T^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R_T^3}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \sqrt{R_T}\, R_T$$

$$\Rightarrow t = \frac{T}{\cancel{2}\tilde{\pi}\cancel{R_T}} \cdot \sqrt{2\gamma} \cdot \cancel{2}\gamma \cancel{R_T} \cdot I$$

$$\Rightarrow t = \frac{\gamma\sqrt{2\gamma}}{\tilde{\pi}} \cdot T \cdot I$$

pero $$\tan^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_A}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\cos\theta_A}{2}}{\frac{1+\cos\theta_A}{2}} = \frac{1-\cos\theta_A}{1+\cos\theta_A}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta_A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta_A}{1+\cos\theta_A}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{2-2\gamma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\gamma\sqrt{2\gamma}}{\tilde{\pi}} \cdot T \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1+3\left(\frac{2\gamma}{2-2\gamma}\right)}{\sqrt{\frac{2\gamma}{2-2\gamma}} \cdot \frac{2\gamma}{2-2\gamma}}}$$