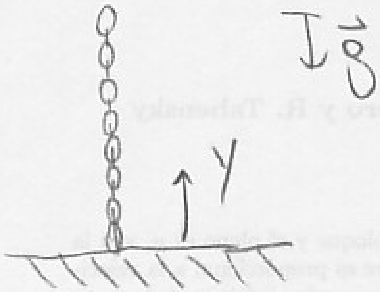
Ejercicio 1.4.39

$$F = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt}$$

velocidad con la que adhiere masa al sistema



Nuestro sistema ahora es el lote de cadena que se está acumulando.

Entonces:

$$m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt} = -mg + N$$

pero $v(t) = 0$ y $u(t) = -gt$

está en reposo el lote en acumulación

velocidad con que caen los dm

$$\Rightarrow gt\frac{dm}{dt} = -mg + N$$

pero la masa m que está acumulada es: $m(t) = \frac{M}{L}\cdot\frac{1}{2}gt^2$

ya que $\frac{M}{L} = \rho_{lineal}$ y $\frac{1}{2}gt^2$ es el largo de cadena que ha caído.

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{M}{L}gt \quad \Rightarrow g\cdot t\cdot\frac{M}{L}gt = -mg + N$$

$$\Rightarrow N = \underset{\downarrow \atop m(t)}{mg} + \frac{M}{2} g^2 t^2 = \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{2} g^2 t^2 + \frac{M}{2} g^2 t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{3}{2} \frac{M}{2} g^2 t^2}$$

Ejercicio 1.4.41

La gota gana masa en el tiempo

$\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} > 0$ con k cte de proporcionalidad y S la proporción.

$\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = k \cdot S$ pero S para una esfera

$\Rightarrow S = 4\pi R^2$ (ya $R = R(t)$)

por otro lado: $m(t) = \dfrac{4\pi}{3} R(t)^3 \rho$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \cancel{4\pi} \cancel{R^2} \cdot \dot{R}(t) \rho = k \cdot \cancel{4\pi} \cancel{R(t)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{k}{\rho}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{k}{\rho} \cdot t + \underset{\text{cte}}{A}$$

pero podemos imponer $R(t=0) = 0$ $(R_0 \ll 1)$

$$\Rightarrow \boxed{R(t) = \frac{k}{\rho} \cdot t}$$

$$m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt} = -mg$$

pero $u(t) = 0$ ya que la nube está en reposo.

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = -mg$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = -mg$$

$$\Rightarrow mv = -\int_0^t mg \, dt$$

$$k \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{k^3 t^3}{\rho^2} \cdot v(t) = -g \int_0^t \frac{4\pi k^3 t^3}{3\rho^2} \, dt$$

$$k \cdot \cancel{\frac{4\pi}{3}} \, \cancel{\frac{k^3 t^3}{\rho^2}} \, v(t) = -g \, \cancel{\frac{4\pi k^3}{3\rho^2}} \, \frac{t^{\cancel{4}\,1}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -\frac{g \cdot t}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) - y(0) = -\frac{g t^2}{8}}$$

Ejercicio 1.4.43

$$v_{piso} = v_{c/cohete} + v_{cohete/piso}$$

Masa inicial $= M$

quema combustible a razón σ

$$\Rightarrow m(t) = M - \sigma t$$

$$m\cancelto{0}{\frac{dv}{dt}} - (u - v)\frac{dm}{dt} = -Mg + N \quad \text{(cuando está en reposo, aún no despega)}$$

$$\Rightarrow -(u - v)\frac{dm}{dt} = -Mg + N$$

pero $u(t) = -U_0$

$$\Rightarrow -U_0 \sigma = -Mg + N$$

$$\Rightarrow N = Mg - U_0 \cdot \sigma$$

que despegue $\Rightarrow N = 0$

$$\Rightarrow \boxed{U_0 \cdot \sigma = Mg}$$

Ahora suponemos cohete en el aire.

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} - (-U_0) \cdot -\sigma = -mg$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} - U_0 \sigma = -mg$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = U_0 \sigma - mg$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{Mg}{m} - g$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Mg}{M-\sigma t} - g$$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^t \frac{Mg}{M-\sigma t}\, dt - gt$$

$$= Mg \underbrace{\left. \frac{\ln(M-\sigma t)}{-\sigma} \right|_0^t}_{\frac{\ln(M-\sigma t)-\ln(M)}{-\sigma}} - gt$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{Mg}{\sigma} \ln\left(\frac{M}{M-\sigma t}\right) - gt$$

$$\boxed{\forall\, t < \frac{fM}{\sigma}}$$