

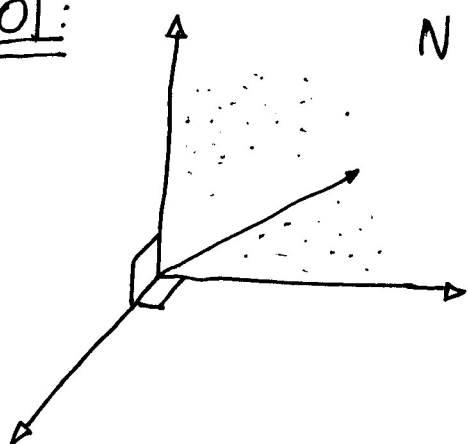
Auxiliar 1

Sistemas de partículas:

Newton:  $m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int}$

P<sub>1</sub>) Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un pto. fijo con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al pto O, DEMOSTRAR que el Centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.

Sol:



N partículas

$$\vec{F}_i = K m_i \|\vec{r}_i\| \hat{r}_i$$

$$= -K m_i \vec{r}_i$$

↑  
Porque es atraída

Luego

$$m_i \vec{a}_i = -k m_i \vec{r}_i$$

(1)  $\boxed{\vec{a}_i = -k \vec{r}_i}$  ← ecuación de movimiento de una partícula cualquiera

Para el Centro de Masa.

$$\frac{\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i}{M} \quad (2) \quad \text{y} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

ahora reemplazando (1) en (2)

$$\frac{\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot (-k \vec{r}_i)}{M} = -k \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

pero sabemos que  $\sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_{cm}$

∴  $\boxed{\vec{a}_{cm} = -k \vec{r}_{cm}}$  ← ecuación de movimiento del centro de masa

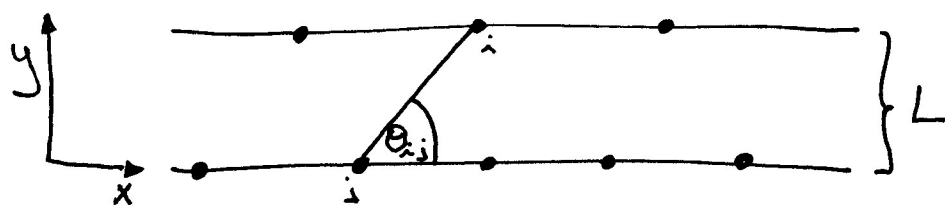
## Ejercicio 2:

9-12-2005

Un conjunto de partículas de masas "m"  
Puede deslizar libremente sobre  
alambres paralelos atrayéndose  
unas a otras con fuerzas  
Proporcionales al producto de sus  
masas y distancias.

Demstrar que las partículas efectúan  
oscilaciones armónicas.

Sol:



$$\vec{F}_{ij} = -k m_i m_j d_{ij} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{ij}) \\ \sin(\theta_{ij}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{ij} = -k m_i m_j d_{ij} \cos(\theta_{ij}) \hat{x} - k m_i m_j d_{ij} \sin(\theta_{ij}) \hat{y}$$

$$\vec{F}_{ij} = -k m_i m_j (x_i - x_j) \hat{x} - k m_i m_j L \hat{y}$$

Para la partícula  $i$ :

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i}^N -k m_i m_j (x_i - x_j) \quad (*)$$

$$\cancel{m_i \ddot{x}_i} = \sum_{j \neq i}^N -k m_i m_j L + N_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j \neq i}^N +k m_i m_j L = N_i$$

La ecuación (\*) es la que importa

$$m_i = m = m_j \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \cancel{m} \ddot{x}_i = -k m^k \sum_{j \neq i}^N (x_i - x_j)$$

$$\ddot{x}_i = -k m \sum_{j \neq i}^N (x_i - x_j)$$

$$\ddot{x}_i = -k m N x_i + k m \sum_{j=1}^N x_j, \text{ Pero } x_{cm} = \sum_{j=1}^N \frac{m x_j}{M}$$

$$\therefore \ddot{x}_i = k M x_{cm} - k m N x_i$$

$$\Rightarrow \left[ \ddot{x}_i = -k M (x_i - x_{cm}) \right] \xrightarrow{L} \text{Oscilación armónica en torno a } x_{cm}$$

$$\omega^2 = k M$$

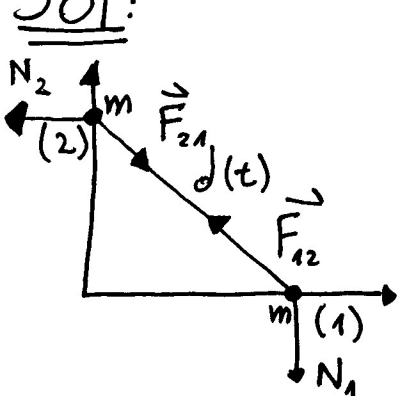


### Ejercicio 3:

9-12-2005

2 partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, Demostrar que el Centro de masa describe una conica con su foco en la intersección de las correderas.

Sol:



$$\hat{d}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\text{y } \vec{F}_{12} = \frac{k}{d^2} \hat{d}_1$$

Para (1)

$$m \ddot{x}_1 = \frac{-k}{d^2} \cos(\theta)$$

$$m \ddot{y}_1 = \frac{k}{d^2} \sin(\theta)$$

Por el principio de acción y reacción

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{k}{d^2} \hat{d}_2 \quad \text{donde } d_2 = \begin{pmatrix} \sin(90-\theta) \\ -\cos(90-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = \frac{k}{d^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Para (2):  $m\ddot{x}_2 = \frac{k}{d^2} \cos(\theta) - N_2 \Rightarrow N_2 = \frac{k}{d^2} \cos(\theta)$

y  $m\ddot{y}_2 = -\frac{k}{d^2} \sin(\theta)$

En resumen importan

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{k}{d^2} \cos(\theta) \\ m\ddot{y}_2 &= -\frac{k}{d^2} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (*)$$

Haciendo un cambio en la notación

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_2 &= y \end{aligned} \quad \text{y además} \quad \begin{aligned} d\cos(\theta) &= x \\ d\sin(\theta) &= y \end{aligned} \quad (\star)$$

Ahora reemplazando (★) en (\*)

9-12-2005

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{d^3} x \quad y \quad m\ddot{y} = -\frac{k}{d^3} y$$

luego la aceleración del centro de masa

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{M} \Rightarrow a_{cm}^x = \frac{-\frac{k}{d^3} x}{2m} = \frac{-kx}{2md^3}$$

$$\Rightarrow a_{cm}^y = \frac{-ky}{2md^3}$$

$$\therefore \vec{a}_{cm} = \frac{-k}{2md^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad [4]$$

$$\text{Pero } x_{cm} = \frac{mx + m \cdot 0}{2m} = \frac{x}{2} \quad [1]$$

$$y_{cm} = \frac{m \cdot 0 + my}{2m} = \frac{y}{2} \quad [2]$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = d^2 \\ x = 2x_{cm} \\ y = 2y_{cm} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) = d^2$$

$$x_{cm}^2 + y_{cm}^2 = r_{cm}^2 \Rightarrow r_{cm} = \frac{d}{2} \quad [3]$$

Luego reemplazamos [1], [2] y [3] en [4] 9-12-2008

$$\vec{a}_{cm} = \frac{-k}{8r_{cm}^2 m} \begin{pmatrix} x_{cm} \\ y_{cm} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{cm} = \frac{-k}{8r_{cm}^2 m} \vec{r}_{cm} \approx -\frac{GMm\hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow m \vec{a} = -\frac{GMm\hat{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \\ \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{GMm}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$$

despejando se tiene:

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{\rho^2}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = \rho \hat{e} \times m \rho \dot{\theta} \hat{e}$$

$$\Rightarrow L = m \rho^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{m \rho^2}$$

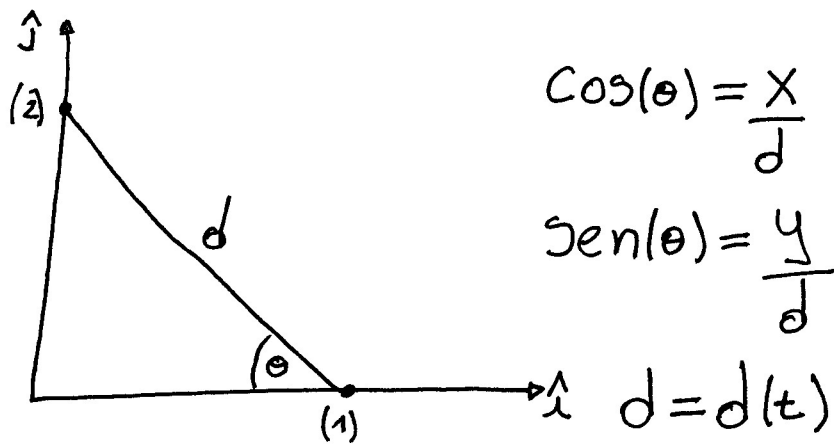
$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3 m^2} = -\frac{GM}{\rho}, \text{ Pero } \vec{F} = -\nabla U$$

$$\therefore U(\rho) = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \text{ (claramente olvidando nos de las ctes, pues no influyen)} \quad (8)$$

### Ejercicio 4:

9-12-2005

Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas Perpendiculares que se intersectan en ①. Demostrar que si las partículas se atraen y ellas parten del reposo Sin importar donde, ellas llegarán Simultáneamente a la intersección.



Sol:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(partícula 1)} \quad m\ddot{x} = -F\cos(\theta) \\ \text{(partícula 2)} \quad m\ddot{y} = -F\sin(\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m\ddot{x} = -\frac{Fx}{d} \quad (1) \\ m\ddot{y} = -\frac{Fy}{d} \quad (2) \end{array}$$

Notemos que todavía no podemos integrar pues no conocemos  $F$  y  $d(t)$ .

En este punto del ejercicio nos damos cuenta que deberíamos llegar a una expresión de la forma  $X(t) = f(y(t))$  puesto que buscamos que si  $y(t^*) = 0 \Rightarrow X(t^*) = 0$ .  
(Una relación que use a  $X, y$  sin  $F$  y  $d$ )

luego si multiplicamos (1) por " $y$ " y (2) por " $x$ " se tiene

$$m\ddot{x}y = -\frac{F}{d}xy \quad \text{y} \quad m\ddot{y}x = -\frac{F}{d}xy$$

Ahora restamos estas ecuaciones

$$m\ddot{x}y - m\ddot{y}x = \frac{F}{d}[xy - xy]$$

$$\Rightarrow \ddot{x}y - x\ddot{y} = 0$$

Ahora Integraremos... ¿Pero Como?...

Usando la ayuda del famoso NIKITA-NIPONE  
Para sumar un cero que nos sirva.

$$\ddot{x}y - \underbrace{\dot{x}\dot{y}} + \dot{x}\dot{y} - \ddot{y}x = 0$$

cero que nos sirve.

reescribiendo la ultima ecuación 9-12-2005

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{x}y - x\dot{y} \} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}y - x\dot{y} = C, \quad C = \text{cte}$$

Ahora usamos el hecho que ambas partículas parten del reposo i.e.:  $\dot{x}(t=0) = 0$   
 $\dot{y}(t=0) = 0$

Luego, como se debe cumplir  $\forall t$  que

$$\dot{x}y - x\dot{y} = \text{cte}$$

también se debe cumplir para  $t=0$

$$\therefore \text{cte} = 0, \quad (\dot{x}(t=0)y(t=0) - x(t=0)\dot{y}(t=0) = 0)$$

$$\Rightarrow \dot{x}y = \dot{y}x$$

Esta ultima ecuación se puede integrar de 2 maneras diferentes.

FISICA o MATEMATICAMENTE.

y llegaremos a los mismos resultados

# Forma Matemática

9-12-2005

$$\dot{x}y = \dot{y}x \quad / \cdot \frac{1}{x \cdot y}$$

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} \quad / \int ( ) dt$$

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt + k, \quad k = \text{cte}$$

luego usando el cambio de variable

$$U = x(t) \quad y \quad V = y(t)$$

$$dU = \frac{dx}{dt} dt \quad y \quad dV = \frac{dy}{dt} dt \quad (\text{Regla de la cadena})$$

$$dU = \dot{x} dt \quad y \quad dV = \dot{y} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{U} = \int \frac{dV}{V} + k$$

$$\Rightarrow \ln(U) = \ln(V) + k, \quad (\text{devolviendo el C.V.})$$

$$\ln(x) = \ln(y) + k, \quad k = \text{cte}$$

$$\therefore x = ye^k \Rightarrow \begin{array}{l} \text{que si } y=0 \Rightarrow x=0 \\ y \text{ si } x=0 \Rightarrow y=0 \end{array}$$



# Forma Física

9-12-2005

$$\dot{x}y = x\dot{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}y = x\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad / \int ()$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + K, K = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \ln(y) + K$$

$$\Rightarrow x = ye^K$$

luego si  $x=0 \Rightarrow y=0$  y si  $y=0 \Rightarrow x=0$

$\therefore$  queda demostrado que ambos partiendo del reposo y atrayendose, sin importar donde partan, llegan simultaneamente a la intersección.

## Ejercicio 5

9-12-2005

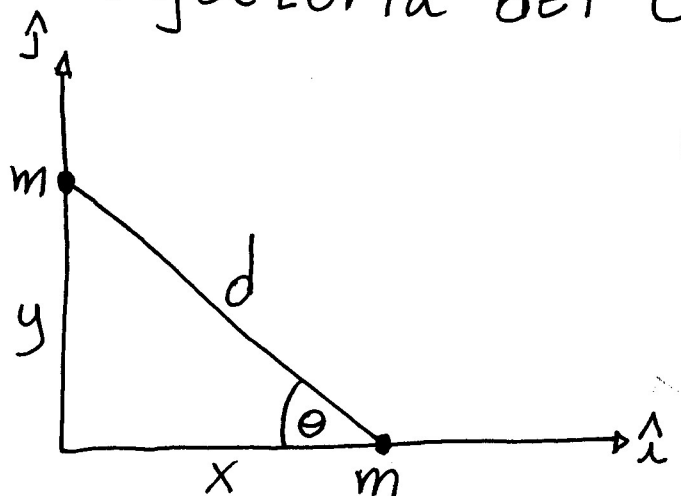
2 partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se intersectan en  $O$ . Las partículas se atraen con una fuerza proporcional a la distancia que las separa, siendo " $K$ " la cte. de proporcionalidad dada las siguientes Condiciones Iniciales para el movimiento de ambas partículas.

(Partícula 1)  $x(0) = a$  ,  $\dot{x}(0) = -v_0$

(Partícula 2)  $y(0) = a$  ,  $\dot{y}(0) = 0$

a) DETERMINAR  $x(t)$  y  $y(t)$ .

b) La ecuación cartesiana de la trayectoria del Centro de Masa.



$$\|\vec{F}\| = k \cdot d = F$$

Sol:

$$a) m\ddot{x} = -F \cos(\theta)$$

$$m\ddot{y} = -F \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kd \cos(\theta)$$

$$m\ddot{y} = -kd \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \\ \ddot{y} = -\frac{k}{m}y \end{array}$$

Ahora para resolver estas E.D.O  
supondremos solución clásica de  
un movimiento armónico. Luego:

Supongamos:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ y(t) &= C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \end{aligned} \quad , \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Luego

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

$$\dot{y}(t) = -C\omega \sin(\omega t) + D\omega \cos(\omega t)$$

Ahora imponemos las condiciones 9-12-2005  
Iniciales para ambas partículas:

$$X(0) = A \cos(0) + B \sin(0) \Rightarrow a = A$$

$$y(0) = C \cos(0) + D \sin(0) \Rightarrow a = C$$

y finalmente

$$\dot{X}(0) = -A\omega \sin(0) + B\omega \cos(0) \Rightarrow -V_0 = B\omega$$

$$\dot{y}(0) = -C\omega \sin(0) + D\omega \cos(0) \Rightarrow 0 = D$$

Con esto hemos encontrado  $x(t)$  e  $y(t)$

$$X(t) = a \cos(\omega t) - \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$, \text{ con } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$y(t) = a \cos(\omega t)$$

$$b) X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^2 m x_i}{2m} \quad y \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^2 m y_i}{2m}$$

$$\Rightarrow X_{cm} = \frac{mX + m \cdot 0}{2m} = \frac{X}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{my + m \cdot 0}{2m} = \frac{y}{2}$$

Luego

9-12-2005

$$X_{cm} = \frac{a}{2} \cos(\omega t) - \frac{V_0}{2\omega} \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$y_{cm} = \frac{a}{2} \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{2y_{cm}}{a} \quad (2)^*$$

Finalmente Reemplazamos  $(2)^*$  en  $(1)$

$$\Rightarrow X_{cm} = y_{cm} - \frac{V_0}{2\omega} \sin(\omega t)$$

recordando que  $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$

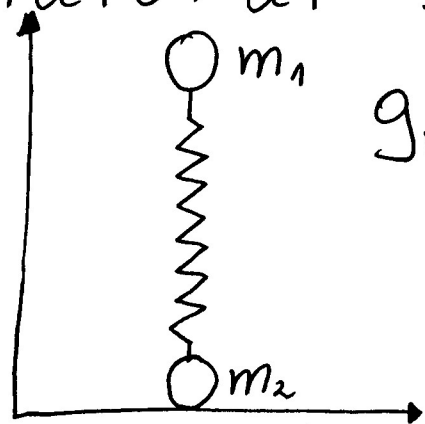
$$\Rightarrow X_{cm} = y_{cm} - \frac{V_0}{2\omega} \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$$

$$\Rightarrow X_{cm} = y_{cm} - \frac{V_0}{2\omega} \sqrt{1 - \frac{4y_{cm}^2}{a^2}}$$

## Ejercicio 6

9-12-2005

Considere un sistema de 2 partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  y un resorte de constante elástica " $k$ " y largo natural " $l_0$ " como el de la figura.



DETERMINE el valor mínimo de la compresión del resorte ( $x$ ), medido con respecto a su largo

Natural para que al soltar  $m_1$  se despegue  $m_2$ .

Indicación: las masas se mueven solo en sentido vertical.

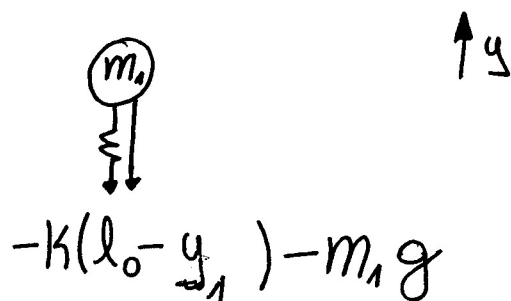
Sol:

Para  $m_1$ :  $y_1(t=0) = l_0 - x_{\min} - \frac{m_1 g}{k}$ ,  $x_{\min}$  escte.  
 $\dot{y}_1(t=0) = 0$

Hagamos los dcl. de las  
Partículas para encontrar las ecuaciones  
de movimiento.

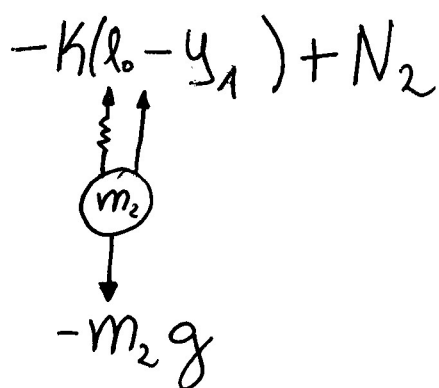
9-12-2005

dcl  $m_1$



$$\Rightarrow m_1 \ddot{y}_1 = -k(l_0 - y_1) - m_1 g$$

dcl  $m_2$



$N_2$  = normal sobre  
la partícula 2.

$$\Rightarrow m_2 \ddot{y}_2 = N_2 + k(l_0 + y_1) - m_2 g$$

En Resumen

Para (1)  $m_1 \ddot{y}_1 = -k(l_0 + y_1) - m_1 g$

Para (2)  $m_2 \ddot{y}_2 = N_2 + k(l_0 + y_1) - m_2 g$

Busquemos  $y_1(t)$ :

9-12-2005

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k}{m_1} (y_1 - l_0) - g$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 = -\frac{k}{m_1} y_1 + \frac{k}{m_1} (l_0 + g \frac{m_1}{k})$$

Esta EDO puede ser resuelta de 2 maneras:

Primera forma:

Solución de  $y_1(t)$  = Solución Homogenea de  $y_1(t)$   
+ Solución Particular de  $y_1(t)$

luego

$$y_h(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

[supongo solución clásica de M.A.S. pues la edo. homog. es  $\ddot{y}_1 = -\frac{k}{m_1} y_1$ ]

$$y_p(t) = \frac{m_1}{k} \left( \frac{k l_0}{m_1} - g \right) = l_0 - \frac{m_1 g}{k}$$



Luego obtenemos que:

$$y_1(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\Rightarrow y_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + l_0 - \frac{m_1 g}{k}$$

Segunda forma

tenemos nuestra ecuación

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k}{m_1} \left[ y_1 - l_0 + \frac{m_1 g}{k} \right]$$

Hacemos el cambio de variable

$$\bar{y}_1 = y_1 - l_0 + \frac{m_1 g}{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{y}}_1 = \ddot{y}_1$$

obteniendo así un Movimiento Armónico Simple

$$\ddot{\bar{y}}_1 = -\frac{k}{m_1} \bar{y}_1$$

Ahora suponemos Solución Clásica

9-12-2005

$$\bar{y}_1 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Aquí debemos tener cuidado puesto que las condiciones iniciales son para  $y_1(t)$ , NO para  $\bar{y}_1(t)$ .  
Bastará con devolver el c.v.

$$y_1 - l_0 + \frac{m_1}{k}g = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow y_1 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + l_0 - \frac{m_1}{k}g$$

recuperando así la solución de la Primera forma.

Ahora podemos aplicar las Condiciones Iniciales.

Aplicamos las C.I.

$$y_1(t=0) = l_0 - X_{\min} - \frac{m_1 g}{k} \quad \text{e} \quad \dot{y}_1(t=0) = 0$$

Entonces

$$y_1(t=0) \Rightarrow A + l_0 - \frac{m_1 g}{k} = l_0 - X_{\min} - \frac{m_1 g}{k}$$

$$\Rightarrow A = -X_{\min}.$$

$$\dot{y}_1(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

evaluando en  $t=0$

$$\dot{y}_1(t=0) = 0 = B\omega \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore y_1(t) = -X_{\min} \cos(\omega t) + l_0 - \frac{m_1 g}{k}$$

Ahora tenemos  $y_1(t)$ , basta reemplazar en  $\ddot{y}_2(t)$

9-12-2005

$$m_2 \ddot{y}_2 = N_2 - K(l_0 - y_1) - m_2 g$$

reemplazando  $y_1$ :

$$m_2 \ddot{y}_2 = N_2 - K\left(l_0 + X_{\min} \cos(\omega t) - l_0 + \frac{m_1}{K} g\right) - m_2 g$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = N_2 - K(X_{\min} \cos(\omega t)) - [m_1 + m_2]g$$

Lo que nos piden determinar es  $X_{\min}$  cuando  $N_2 = 0$  y la partícula 2 está aun en reposo.

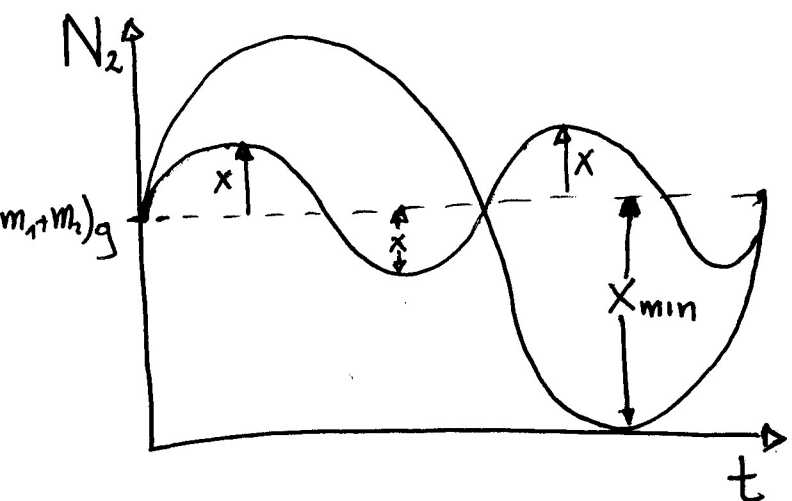
$$\therefore \ddot{y}_2 = N_2 = 0$$

$$\Rightarrow K X_{\min} \cos(\omega t) + [m_1 + m_2]g = 0$$

Ahora podemos interpretar de 2 maneras el resultado llegando al mismo valor de  $X_{\min}$

La primera es hacer un gráfico de  $N_2$  vs  $t$

9-12-2005



$X_{min}$  para que  $N_2$  sea cero se obtiene cuando el coseno es igual a  $-1$

$$\Rightarrow -kX_{min} + [m_1 + m_2]g = 0$$

$$\Rightarrow X_{min} = \frac{[m_1 + m_2]g}{k}$$

La segunda es trabajarlo matemáticamente

$$+kX_{min} \cos(\omega t) = [m_1 + m_2]g$$

$$[kX_{min}(-1)] \leq [m_1 + m_2]g \quad / \cdot -1$$

$$kX_{min} \geq [m_1 + m_2]g, \text{ y como DEBE cumplirse}$$

$$\Rightarrow X_{min} = \frac{[m_1 + m_2]g}{k}$$