

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LOS MATERIALES  
<http://lindsey.uchile.cl>  
EMail: [lindsey@cec.uchile.cl](mailto:lindsey@cec.uchile.cl)

**Marzo 22, 2005.**  
RAcevedo.

Algunos elementos Preliminares y Lecturas complementarias

## **I.- Palabras iniciales:**

En general, un fluido es una sustancia capaz de fluir, en consecuencia este término incluye a líquidos y gases. De igual forma, un sólido tiene un tamaño y una forma definida y, en consecuencia la mecánica para estos es la mecánica de un cuerpo rígido, adecuadamente modificada por las leyes de la elasticidad para todos aquellos cuerpos que no son perfectamente rígidos.

Los fluidos cambian su forma fácilmente y su comportamiento mecánico no puede ser descrito de la forma anterior. Existen, diferencias notables entre líquidos y gases ; los primeros son prácticamente incompresibles en cambios los gases son muy sensibles a los cambios de volúmenes. Así, el trabajo mecánico para gases y líquidos puede ser escrito de la forma que se indica:  $d(PV) = PdV + VdP$ , donde el primer término se aplica a gases y el segundo a líquidos.

Es necesario indicar, que cuando se estudia el comportamiento mecánico de los fluidos solamente utilizaremos las propiedades de líquidos y gases , los cuales se relacionan por su capacidad de fluir. De esta forma, las mismas leyes rigen el comportamiento estático y dinámico de líquidos y gases. En el caso de un fluido, éste debe estar confinado en un recipiente cerrado, sí deseamos aplicar una fuerza sobre éste. Es útil describir la fuerza sobre un fluido, en términos de la presión (módulo de la fuerza normal por unidad de superficie), por cuanto la presión es un escalar. De esta forma:  $p = \Delta F / \Delta S$ . También, sabemos que la presión puede variar de punto en punto, en consecuencia resulta aplicable definirla de la forma siguiente:  $p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$ .

De igual forma, la densidad  $\rho$ , en el caso de un fluido homogéneo depende de una serie de factores, tales como presión y temperatura. En el caso de líquidos, la densidad varía solo ligeramente con cambios en estas magnitudes, en consecuencia podemos tratar la densidad de éstos como si fuese una constante. La situación es distinta en el caso de gases, para los cuales se observan variaciones de ésta con  $P$  y  $T$ . El lector es invitado a revisar, el contenido de la Tabla 1.

**Tabla 1:** Densidades  $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$  a 298,16K y 1 atm

**1.-)Gases:**

Aire	1,2930
$CO_2$	1,9770
$He$	0,1785
$H_2$	0,0899
$O_2$	1,4290
$N_2$	1,2510

**2.-)Líquidos:**

Eter	$0,73.10^3$
Alcohol Etílico	$0,81.10^3$
Mercurio	$13,6.10^3$
Aceite de olivo	$0,92.10^3$
Agua de mar	$1,03.10^3$
Agua	$1,00.10^3$

**3.-)Sólidos:**

Aluminio	$2,70.10^3$
Bronce	$8,50.10^3$
Cobre	$8,90.10^3$
Corcho	$0,24.10^3$
Oro	$19,3.10^3$
Hielo	$0,92.10^3$
Hierro	$7,60.10^3$
Plomo	$11,3.10^3$
Platino	$21,4.10^3$
Plata	$10,5.10^3$
Madera,olmo	$0,57.10^3$
Madera,pino blanco	$0,42.10^3$
Cinc	$7,10.10^3$

## II.-Presión y Fluido en Reposo

Consideremos la situación de un fluido en equilibrio y procedamos a focalizar nuestra atención en un pequeño elemento de volumen del fluido, en la masa total del fluido.

Para efectos prácticos, supongamos que este elemento tenga la forma de un disco delgado a la altura, digamos y sobre algún nivel de referencia. El área del disco es A y el espesor del disco (en reposo) es “dy”, en consecuencia el volumen es  $dV = A dy$ , y su masa es:  $\rho = \frac{m}{dV} = \frac{m}{A dy}$  y la masa asociada es:  $m = \rho dV = \rho A dy$  con lo cual su peso es  $mg$ , es decir:  $g\rho A dy$ .

- 1.-) Las fuerzas ejercidas sobre este elemento por el fluido circundante son necesariamente perpendiculares a su superficie en todos sus puntos.
- 2.-) La fuerza horizontal es nula, por cuanto el elemento en consideración no experimenta aceleración alguna en esta dirección horizontal.
- 3.-) La presión es necesariamente la misma en todos los puntos del elemento, localizados a la misma altura, digamos y.
- 4.-) El elemento de fluido, tampoco presenta aceleración vertical, por lo tanto la sumatoria de fuerzas en esta dirección debe ser nula. Estas fuerzas verticales son de dos categorías:  
(a) presión ejercida por el fluido sobre las caras del elemento  
(b) peso del elemento

En este sentido podemos escribir:  $\frac{dp}{dy} = -\rho g$ , la cual ha sido obtenida aplicando la condición de equilibrio vertical, generada a partir de las siguientes consideraciones: Sea “p” la presión ejercida sobre el elemento en su cara inferior y “ $p + dp$ ”, sobre la cara superior, por lo tanto la fuerza ejercida verticalmente en la dirección y sentido de +y es “ $pA$ ” y la correspondiente a la fuerza ejercida en sentido opuesto es “ $(p + dp)A$ ”. Por lo tanto en equilibrio se cumple:  $pA = (p + dp)A + \rho g A dy$ .

Algunas consideraciones:

- (a) La variación de la presión con altura, con respecto de algún nivel de referencia, para un fluido en **equilibrio estático**. La magnitud  $\rho g$ , se conoce como DENSIDAD DE PESO, (peso específico), es decir, es el peso por unidad de volumen del fluido.
- (b) Para los líquidos, el valor de la densidad es prácticamente constante, por cuanto estos gozan de la propiedad de incompresibilidad, en consecuencia si consideramos tanto la densidad como la aceleración de gravedad constantes, podemos escribir para un líquido homogéneo la identidad:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

- (c) Para un líquido cuya superficie superior está abierta y sometida directamente a la presión atmosférica, tenemos una expresión general del tipo:  $p = p_0 + \rho gh$ . Esta expresión se obtiene bajo las siguientes consideraciones: Supongamos que a la altura  $y_1$  la presión es

simplemente  $p$  y a la altura  $y_2$ , tenemos la presión atmosférica  $p_0$ . Adicionalmente, escribimos la altura relativa  $h = y_2 - y_1$ . En consecuencia, **la presión debe necesariamente ser la misma para todos los puntos que se encuentren a la misma altura.**

(d) En un recipiente térmico que contiene un gas, podemos anticipar que la presión puede, en principio ser considerada la misma en todos los puntos, siempre y cuando el valor de la altura relativa  $h$ , se relativamente pequeño. En contraste, podemos anticipar que en el caso del aire, su presión varía considerablemente conforme subimos y/o bajamos a alturas considerables. En estas situaciones los valores de densidad varían con la altura, es decir:  $\rho = \rho(h)$

Ejemplo: Considere la variación de la presión con la altura en la atmósfera de la tierra.

Lo anterior, precisa de un supuesto básico: Sea la densidad proporcional a la presión (lo cual solo sería cierto, si la temperatura del aire fuese la misma a todas las temperaturas, cuestión que no es así y no puede ser así). En todo caso, si suponemos que la densidad es proporcional a la presión, entonces se cumple:  $\frac{dp}{dy} = -\rho g$  y, en el supuesto que la

densidad fuese proporcional a la presión podemos escribir:  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$ , donde los valores de

densidad y presión con un subíndice "0" son conocidos y corresponden a los valores medidos a nivel del mar. En estas condiciones, es directo demostrar:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} dy \rightarrow p = p_0 \exp\left[-\frac{g\rho_0}{p_0} y\right] \rightarrow p = p_0 \exp(-ay)$$

Valores:  $g = 9,89 \frac{m}{seg^2} \rightarrow \rho_0 = 1,20 \frac{Kg}{m^3} (20^\circ C) \rightarrow p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \frac{Nt}{m^2}$ , de donde:

$$a = 0,116 Km^{-1}$$

1) Observación: Los líquidos son prácticamente incompresibles, en consecuencia las capas inferiores de éstos no son significativamente comprimidas por el peso de las superiores, en consecuencia la densidad es prácticamente constante para todas las capas. En el caso de gases a temperatura uniforme, la densidad de cualquier capa es proporcional a la presión de dicha capa. De esta forma, la variación de presión con la altura sobre el fondo del fluido es distinta a lo que ocurre con un líquido.

Algunas consecuencias son la siguientes:

(A) Sobre el nivel del mar:  $\frac{dp}{dy} = -\rho g = -a p_0 \exp[-ay]$

(B) Bajo el nivel del mar:  $\frac{dp}{dy} = -\rho g = Constante$

2)Observación: La relación de la presión entre dos puntos en un fluido , independiente de la forma del recipiente térmico que lo contenga está dada por la expresión:  $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$ . Esto por cuanto, cualquiera sea la forma del depósito , dos puntos cualesquiera del fluido pueden ser unidos mediante una trayectoria construida por medio de trazos verticales y horizontales. Una situación interesante, es la que ocurre para un tubo en U, lleno de agua. Supongamos para efectos ilustrativos que otro líquido que no se mezcle con el agua se vierta por uno de los lados del tubo en U.

1.-)Inicialmente cuando solo tenemos agua: Ambos lados del tubo en U quedan llenos con igual volumen de agua.(altura “ $l$ ”)

2.-)Al verter otro líquido no miscible con agua por uno de los lados, vemos que uno de los lados queda a una altura “ $d$ ” sobre el nivel del otro lado, el cual ha subido en “ $l$ ”. En este caso, el cociente de densidades es de la forma:  $\frac{\rho}{\rho_w} = \frac{2l}{2l + d}$ . La relación de densidad de

una sustancia con respecto de la del agua , se conoce como densidad relativa de dicha sustancia. (El valor de  $2l$  , proviene del hecho de que la columna de agua se ha elevado una altura  $l$  de un lado y ha disminuido en la misma cantidad del otro lado.

### III.- Dinámica de Fluidos

#### 3.1.-)Ideas preliminares:

1.-)Una forma de describir el movimiento de un fluido sería el de monitorear el movimiento de cada una de las partículas constituyentes en el tiempo. Esta idea fue pronto desechada por su inconveniencia y falta de aplicabilidad. Esta metodología es, no obstante aplicable a la mecánica de partículas, en la cual el trabajo de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) es de gran relevancia.

2.-)Existe una forma más conveniente de racionalizar el problema y resulta interesante el trabajo desarrollado por Leonard Euler (1707-1783). En este enfoque se privilegia los cambios en la densidad y de la velocidad del fluido en cada punto del espacio en función del tiempo. De esta forma, estudiaremos el movimiento del fluido, especificando la densidad  $\rho(x, y, z)$  en el punto  $(x, y, z)$  en el tiempo  $t$ . “La idea consiste en intentar modelar lo que ocurre en un punto particular en el espacio en un tiempo dado, más bien que lo que acontece con una partícula dada del fluido”.

3.-)Algunas características del flujo de fluidos:

(3.1)El flujo de fluidos puede ser estable o variable.

(3.2)“Cuando la velocidad del fluido  $\vec{v}$  , en cualquier punto del espacio, se mantiene constante en el transcurso del tiempo ., se dice que el movimiento del fluido es uniforme (es decir, en un punto cualquiera en un flujo de régimen estable , la velocidad de cada partícula que se mueve es siempre la misma. En otro punto, por ejemplo puede pasar otra partícula con una velocidad distinta, sin embargo toda partícula que pase por este segundo punto, se comportará en dicho punto de la misma forma como se comportaba la primera partícula, cuando pasó por este punto). Estas condiciones se pueden lograr, toda vez que la velocidad del flujo sea reducida.

4.-)Para fluidos de régimen variable, las velocidades son funciones del tiempo. En el caso del flujo turbulento, las velocidades varían desordenadamente , tanto de un punto a otro como de un momento a otro.

5.-)El flujo puede ser rotacional o irrotacional. De esta forma, sí el elemento de fluido en cada punto no tiene una velocidad angular neta con respecto de ese punto, entonces el flujo es irrotacional (éste es importante por cuanto es relevante en problemas relativamente sencillos. La cantidad de movimiento angular no juega rol alguno en este caso y la velocidad es relativamente simple. De igual forma, el flujo rotacional comprende en su estudio, tanto el movimiento vertical (ejemplo: remolinos) como el transversal.

6.-)El flujo puede ser compresible o incompresible: El flujo de líquidos puede ser compresible o incompresible. De esta forma, los líquidos pueden ser considerados como fluyendo incompresiblemente. No obstante, los gases (compresibles), en ocasiones pueden experimentar cambios de densidades relativamente pequeños en magnitud (su flujo es, entonces, casi incompresibles

7.-)El flujo puede ser viscoso o no viscoso. Entendemos la viscosidad en el flujo de fluidos, como un fenómeno análogo a la fricción (en el movimiento de sólidos). En problemas de lubricación es importante, sin embargo corrientemente es insignificante . La viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas de fluido en movimiento relativo y genera una disipación de energía mecánica.

8.-)Por simplicidad este estudio será limitado a fluidos caracterizados por régimen estable, irrotacional, incompresible y no viscoso. Este análisis, no obstante restringido tiene una variedad de aplicaciones.

### 3.2.-)Flujo Irrotacional

Como señalamos en un flujo de régimen estable, la velocidad en un punto dado es constante en el tiempo.

Figura 1:Flujo de régimen estable.



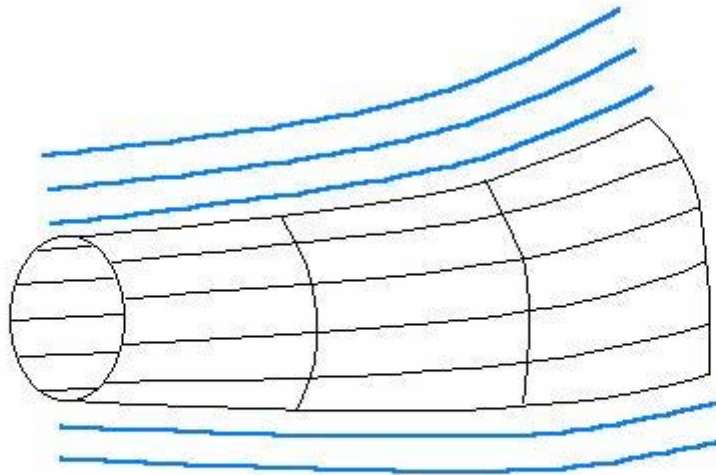
Dado que la velocidad no cambia en el tiempo, entonces toda partícula que llega al punto P, pasa por este punto con la misma velocidad y en la misma dirección. Igual cosa ocurrirá con los puntos Q y R. Al trazar la trayectoria de la partícula, entonces dicha curva será la correspondiente a la trayectoria de toda partícula que llegue a P (la trayectoria, se llama línea de corriente). De esta forma, una línea de corriente será paralela a la velocidad de las partículas del fluido, en cualquier punto. No es posible que se crucen dos líneas de

corriente, por cuanto sí lo hiciesen , entonces al llegar una partícula a esa posición podría seguir por una o por otra línea de corriente, con lo cual el flujo no sería de régimen estable.

En principio, podríamos dibujar una línea de corriente por cada uno de los puntos del fluido. A continuación (ver, Figura 2) procederemos a seleccionar un número finito de líneas de corriente que den origen a un haz(esta región tubular, se conoce como tubo de flujo). La frontera de este tubo está constituida por líneas de corriente y es siempre paralela a la velocidad de las partículas del fluido. De esta forma, nada del fluido puede cruzar la frontera de un tubo de flujo y el tubo se comporta como si fuese una tubería de igual forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro. En el flujo de régimen estable , el patrón de líneas de corriente en el fluido no varía con el tiempo.

NOTA: Sólo en el flujo de régimen estable, coincide la trayectoria(línea de movimiento) con la línea de corriente, dada la dirección instantánea de la velocidad de todas las partículas del fluido en esa línea. En un flujo de régimen variable, la trayectoria trazada por un partícula dada del fluido conforme transcurre el tiempo, no coincide con la línea de corriente para un instante dado. La línea de corriente cambia conforme transcurre el tiempo en el flujo de régimen variable, de forma tal que la línea de corriente y la línea de movimiento se tocan en un punto, donde está situada la partícula del fluido en dicho momento. Es evidente que el flujo de régimen estable corresponde a una situación más simple de comprender.

Figura 2: Tubo de flujo



#### IV.-Ecuación de continuidad:

Para estos efectos, consideremos un tubo de flujo, como el que se indica en la Figura 3. Se trata de un tubo delgado. La velocidad en el interior de éste, no obstante paralela al tubo en cualquier punto, puede variar de punto en punto. Sea  $\vec{v}_1$  la velocidad de las partículas de fluido en P y  $\vec{v}_2$ , dicha velocidad en Q. Sean  $A_1$  y  $A_2$ , las áreas de las secciones transversales del tubo perpendicular a las líneas de corriente en los puntos P y Q, respectivamente. De esta forma, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , un elemento de fluido avanza aproximadamente la distancia  $v\Delta t$ . De esta forma, la masa de fluido  $\Delta m$ , que cruza  $A_1$ , en el intervalo de tiempo considerado es aproximadamente:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

es decir, el flujo de masas es expresable de la forma que se indica:

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho_1 A_1 v_1 \text{ en P}$$

y en el punto Q, obtenemos una expresión semejante del tipo:

$$\frac{dm_2}{dt} = \rho_2 A_2 v_2 \text{ en Q}$$

donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las densidades del fluido en P y en Q.. Considerando que no existe salida de fluido por las paredes del tubo como tampoco presencia de “fuentes” o “sumideros” en los que pueda aparecer o desaparecer fluido en el tubo. De esta forma, podemos establecer la identidad:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \rightarrow \rho A v = \text{Constante}$$

La expresión anterior, corresponde a la ley de conservación de la masa en dinámica de fluidos (ecuación de continuidad del flujo de masa). En la situación general, de existencia de fuentes o sumideros, la densidad  $\rho$ , varía en el tiempo y con la posición y para estas condiciones será preciso modificar la ecuación de continuidad. Sí la velocidad del fluido es  $v_x$ , entonces escribimos:

$$\frac{d(\rho v_x)}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = Q$$

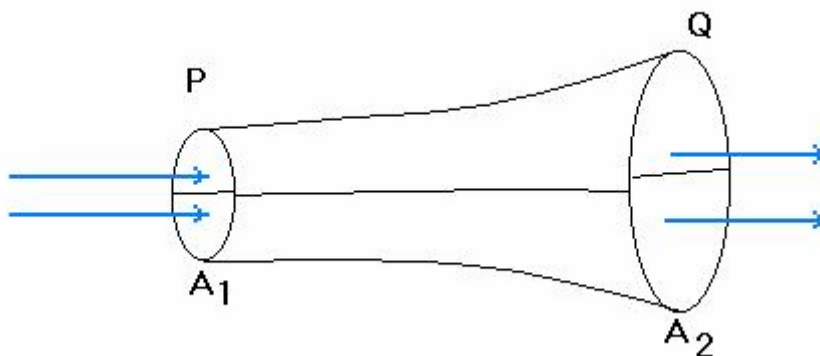
El primer término, representa el aumento de flujo de masa por unidad de área de sección transversal y por unidad de distancia en la dirección + X, el segundo proporciona el incremento de la densidad de fluido por unidad de tiempo y el término del miembro de la derecha se asigna a la masa de fluido que aparece por unidad de tiempo y de volumen de



una fuente. En ausencia de “fuente” o “sumidero”, el valor de  $Q$  es nulo y se cumple la relación:  $\frac{d(\rho v_x)}{dt} = -\frac{d\rho}{dt}$

Adicionalmente, si el fluido es incompresible se cumple  $\rho_1 = \rho_2$ , con lo cual se satisface:  $Av = \text{Constante}$  y por lo tanto:  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ . El producto “ $Av$ ” se conoce como flujo de volumen o simplemente gasto. En estas condiciones, podemos señalar que “En un flujo incompresible de régimen estable, la velocidad de flujo varía en forma inversamente proporcional con el área de la sección transversal, siendo éste mayor en las partes más angostas del tubo”. El resultado anterior, es decir que el producto  $Av$  se conserve a lo largo del tubo de flujo, nos permite obtener una interpretación visual de las líneas de corriente. De esta forma, en la parte más estrecha del tubo, éstas líneas deben estar más cercanas que en una parte más ancha. De esta forma, en la medida que disminuye la distancia entre las líneas de corriente, entonces la velocidad del fluido debe necesariamente aumentar. De esta forma, concluimos que las líneas de corriente muy separadas entre sí, sugieren regiones de baja velocidad en cambio situaciones en las cuales estas líneas se encuentran más cercanas entre sí, corresponden a situaciones en las cuales se observarán altas velocidades. Adicionalmente, podemos señalar que una partícula de velocidad  $\vec{v}_1$  en P, debe necesariamente disminuir su movimiento hacia delante, al adquirir en Q una velocidad menor, digamos  $\vec{v}_2$  (el fluido retarda al ir de P a Q). Esta retardación, puede provenir de una variación de la presión que obra sobre la partícula de fluido que fluye de P a Q o de la fuerza de gravedad. De esta forma, en un tubo de flujo horizontal a régimen estable, la presión es mayor donde la velocidad es menor.

Figura 3: Tubo de flujo. Ecuación de continuidad



## V.-Ecuación de Bernoulli

Básicamente, corresponde a un enunciado del Teorema del Trabajo y de la Energía, aplicado al flujo de fluidos. Para estos efectos, ver Figura 4, la cual tiene como propósito ilustrar como una presión de fluido se mueve desde un punto a otro. Por razones de

simplicidad, consideremos un flujo no viscoso, de régimen estable e incompresible de un fluido que atraviesa una tubería o tubo de flujo.

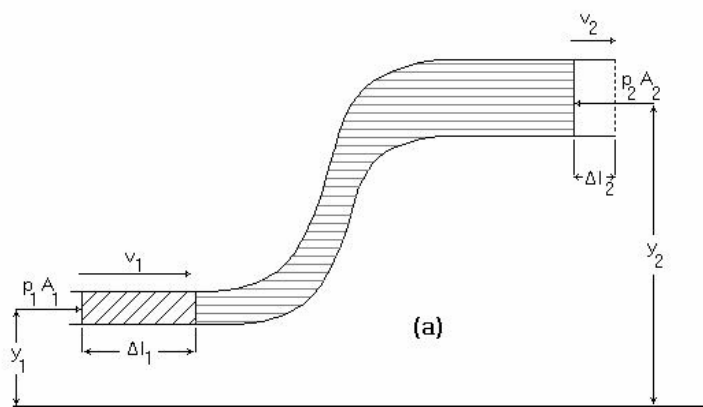
Descripción de la experiencia:

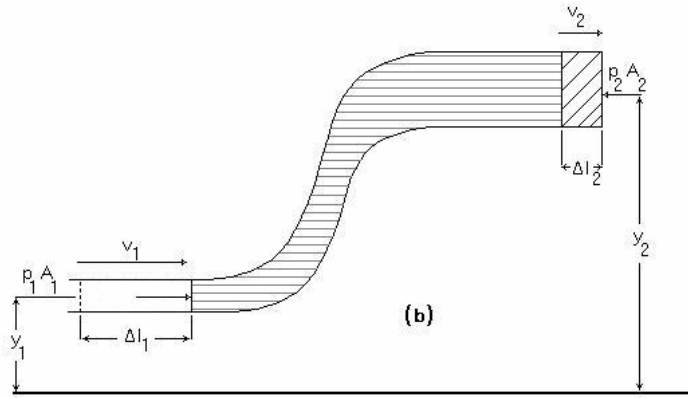
- 1.-) La porción de tubo que se muestra en la Figura 4, posee una sección transversal uniforme  $A_1$  a la izquierda. En esta región es horizontal y se encuentra a una altura  $y_1$ , con relación a algún nivel de referencia. Este tubo se va, gradualmente ensanchando, con una sección transversal de área  $A_2$  a la derecha y a la altura  $y_2$ .
- 2.-) Obsérvese la porción de fluido, representada por el fluido achurado, tanto verticalmente como horizontalmente (éste, será nuestro sistema). De esta forma, procederemos a considerar el movimiento de este fluido no viscoso, de régimen estable e incompresible, al ir desde el punto (a) hasta el punto (b).
- 3.-) Hacia el año 1783, Daniel Bernoulli (1700-1782), propuso para el movimiento de este tipo de fluido, una ecuación del tipo:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{Constante}$$

- 4.-) La ecuación de Bernoulli es aplicable solo a un flujo de régimen estable. Las cantidades que participan en esta ecuación, deben ser consideradas en la **misma línea de corriente**. En la Figura 4, la línea de corriente utilizada es la que sigue el límite inferior del tubo de flujo o tubería. En la ecuación anterior, todos los términos tienen la dimensión de presión. De esta forma, el término  $p + \rho g y$ , conocido como “presión estática” existiría aún en el caso de movimiento nulo en cambio el término  $\frac{1}{2} \rho v^2$  es corrientemente denominado “presión dinámica”. Observemos de la ecuación anterior, que si el fluido está en reposo, entonces, su velocidad de movimiento del flujo del fluido es idénticamente nula. En estas condiciones:  $p + \rho g y = \text{Constante}$ , es decir:  $p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 \rightarrow \Delta p_{12} = -\rho g \Delta y_{12}$

Figura 4: Una presión de fluido (sombreado inclinado y sombreado horizontal) se mueve en una sección de tubería de la posición (a) a la posición (b).





Algunas Observaciones relevantes:

A.-)En el caso de un fluido incompresible, no viscoso no resulta posible cambiar la temperatura, utilizando medios mecánicos. En este sentido, la ecuación de Bernoulli indicada en la sección anterior, es decir:  $p + \rho gy + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Constante}$ , se refiere a procesos que se verifiquen a temperatura constante (procesos isotérmicos).

B.-)Es posible, sin embargo, cambiar la temperatura de fluidos compresibles no viscosos por medios mecánicos. Para estos efectos, es posible generalizar la ecuación de Bernoulli y agregar un término, digamos “u”, el cual represente la energía interna por unidad de volumen del fluido. De esta forma, este término y la presión serán funciones de la temperatura.

C.-)Sí el flujo es viscoso, entonces se ejercen sobre el fluido fuerzas del tipo “fricción”. De esta forma, una fracción del trabajo realizado por la presión, calculado para el caso incompresible se transforma en energía calorífica y no así en aumentar la energía mecánica.

De esta forma, la variación de energía mecánica es menor que el trabajo realizado por la presión y por lo tanto podemos escribir la identidad:

$$(p_1 - p_2) \left( \frac{m}{\rho} \right) = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \right) + (m g y_2 - m g y_1) + Q$$

en la expresión anterior,  $Q$  representa la energía calorífica generada en el flujo viscoso del punto 1 al punto 2.

D.-)En la práctica la ecuación de Bernoulli, es posible modificarla introduciendo correcciones empíricas para tomar en cuenta la conversión de energía mecánica en

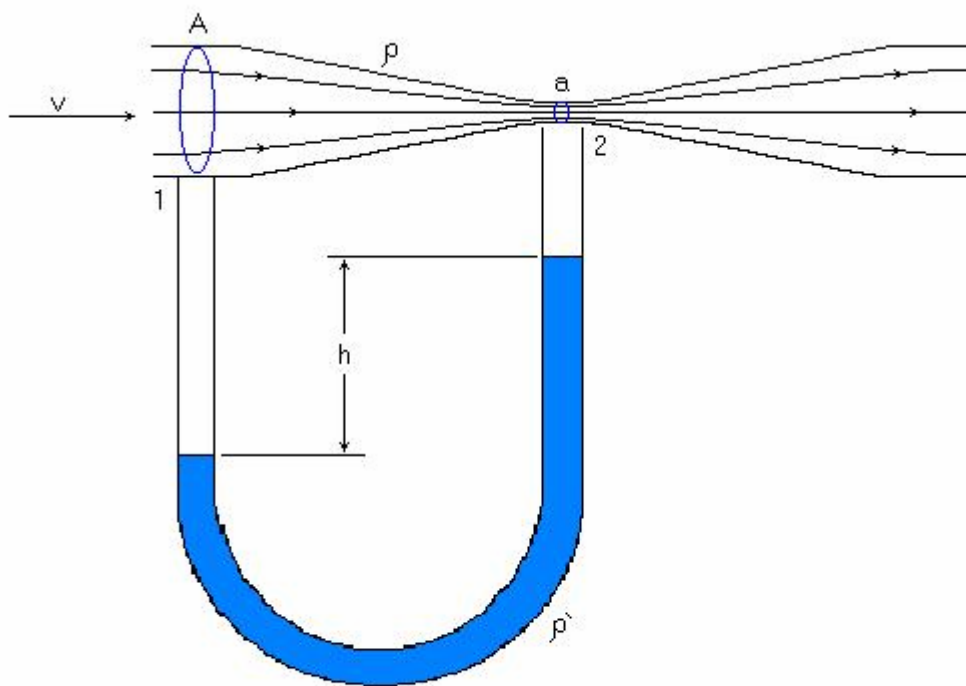
calorífica. Una situación a tener en cuenta aparece cuando la tubería es lisa y presenta un diámetro grande comparado con la longitud, y sí el fluido se mueve lentamente y tiene una viscosidad pequeña, entonces el calor generado es despreciable.

E.-)Algunas aplicaciones simples de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad:

La ecuación de Bernoulli se utiliza para determinar las velocidades de fluidos por medio de mediciones de presiones. De esta forma, recordemos que la ecuación de continuidad exige que aumente la velocidad del fluido en un proceso de contracción, y la ecuación de Bernoulli establece que allí debe producirse una disminución de presión. De esta forma para el caso de un tubo horizontal, la magnitud  $\frac{1}{2}\rho v^2 + p$  debe ser una constante, de forma tal que sí la velocidad aumenta entonces debe disminuir la presión.

(e.1)Medidor de Venturi: Se trata de un manómetro, dispuesto en el tubo para medir la velocidad de flujo líquido. Un líquido de densidad  $\rho$  fluye por un tubo de sección transversal A. En el cuello, ésta área se reduce a “a” y se instala un tubo manométrico, como se indica en la Figura 5.

Figura 5  
Medidor de Venturi



Sea  $\rho'$ , la densidad del líquido manométrico (por ejemplo, Mercurio). En este caso, la combinación de las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli nos conduce a demostrar que la velocidad de flujo en A es:

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}$$

y de esta forma, el flujo de volumen o gasto  $Q$ , que corresponde al volumen de líquido que pasa en cualquier sección cada segundo procedemos a calcular:  $Q = vA$

#### (e-2)Tubo de Pitot

Es utilizado para medir la velocidad de un flujo de un gas. Para estos efectos, consideremos un gas pasando por las aberturas “a”. Como apreciamos, estas aberturas son paralelas a la dirección del flujo y son localizadas atrás a una distancia suficiente para que la velocidad y la presión fuera de las aberturas presente el mismo valor, que los valores de la corriente libre. Bajo estas condiciones, la presión en la rama izquierda del manómetro conectado con esas aberturas resulta ser igual a la presión estática en la corriente del gas  $p_a$ . De igual forma, la abertura de la rama derecha del manómetro es perpendicular a la corriente. La velocidad se reduce a cero en “b” y el gas está en reposo en ese punto.

La presión en “b” es la presión total de ariete  $p_b$ . De esta forma, aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos “a” y “b”, obtenemos:  $p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_b$  con  $p_b > p_a$ .

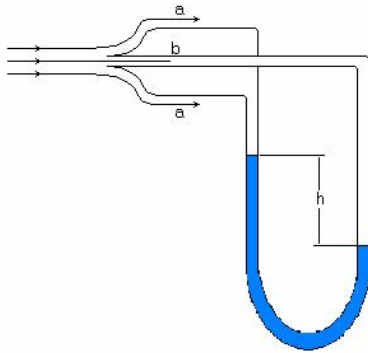
Sí “h” representa la diferencia de alturas del líquido en las ramas del manómetro y  $\rho'$  corresponde a la densidad del líquido manométrico, entonces se cumple:

$$p_a + \rho' gh = p_b$$

al comparar las dos ecuaciones, obtenemos:  $v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}$ , expresión que nos entrega en

forma directa la velocidad del gas. Este dispositivo puede ser calibrado para proceder a leer la velocidad directamente (indicador de velocidad del gas). En la Figura 6, se entrega el tubo de Pitot.

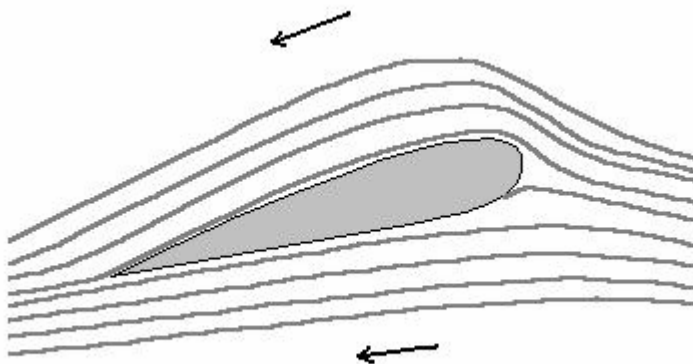
Figura 6  
Tubo de Pitot



(e-3) Fuerza ascensional en una ala de avión:

En la Figura 7, se muestra , el patrón de flujo a régimen estable en un plano aerodinámico, constituido por la sección transversal de un ala de avión en un túnel de viento. En general, los planos aerodinámicos se caracterizan por un borde de salida afilado y una mayor curvatura en la superficie superior que en la inferior. Esta forma, produce una mayor velocidad de flujo a lo largo de la superficie superior que por inferior, lo que es posible apreciar por la figura de las líneas de corriente. El amontonamiento de las línea de corriente sobre el plano aerodinámico , muestra que la velocidad del aire allí es mayor que la velocidad de la corriente libre. Por lo tanto, la presión en la parte superior del ala es menor que la presión de corriente libre (de acuerdo a la ley de Bernoulli). La diferencia de presiones entre las superficies inferior y superior produce un empuje o fuerza ascensional . Sí el ángulo entre la dirección de flujo y el plano aerodinámico aumenta suficientemente, el flujo puede dejar de ser estable y dar paso a una turbulencia. En estas situaciones, la ecuación de Bernoulli no es aplicable. De hecho la presión por arriba aumenta, la fuerza ascensional disminuye y el aeroplano puede reducir su velocidad a un valor menor del mínimo necesario.

Figura 7



## VI.-)Temperatura:

Es sabido que en fenómenos caloríficos, el punto de vista macroscópico lo entrega la termodinámica, en cambio el microscópico es parte de los estudios de la mecánica estadística. Un aspecto interesante es el “sentido del tacto”, el cual nos permite en una primera aproximación distinguir entre cuerpos calientes y fríos, en estos términos hablamos de “nuestro sentido de temperatura”. No obstante, hacia 1690, John Locke demostró que no es posible confiar en este método del tacto, descrito en las líneas anteriores. Al sumergir ambas manos, una en agua fría y la otra en agua caliente y posteriormente sumergir ambas simultáneamente en otra fuente de temperatura intermedia, concluimos que a una mano el agua le parecerá caliente y a la otra helada, lo cual sugiere que nuestro juicio de la temperatura puede llegar a ser engañoso.

Supongamos que, ponemos en contacto dos cuerpos, inicialmente a temperaturas diferentes  $T_1$  y  $T_2$  resulta directo observar que después de un tiempo dado ambos cuerpos alcanzan una temperatura intermedia conocida como temperatura de equilibrio. En este caso, decimos que ambos cuerpos alcanzan un estado de equilibrio térmico. De esta forma, lo lógico y operacional del equilibrio térmico consiste en utilizar un tercer cuerpo, conocido como termómetro. Todo lo anterior, se resume en un postulado conocido como ley cero de la termodinámica: “Sí A y B están en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí”. Esta línea de argumentación está de acuerdo con nuestro sentido de temperatura, como una especie de medida de calor o frío del sistema, por cuanto el grado de calor de todos los cuerpos se iguala después de que han estado en contacto un tiempo lo suficientemente grande.

Sabemos de la existencia de una serie de propiedades físicas que cambian con la temperatura (ejemplos: volumen de un líquido, largo de una varilla, resistencia eléctrica de un alambre, presión de un gas a volumen constante, volumen de un gas a presión constante y el color del filamento de una lámpara). Cualquiera de estas propiedades puede ser utilizada para construir un termómetro. De esta forma, se especifica un termómetro escogiendo: (a) sustancia termométrica especial y (b) propiedad termométrica particular de esta sustancia, la cual suponemos que varía en forma continua y homogénea con la temperatura. Así la sustancia termométrica puede ser un líquido en un tubo capilar de vidrio y la propiedad termométrica puede ser la longitud de la columna del líquido. De igual forma, podemos escoger un gas contenido en un recipiente térmico, a volumen constante y la propiedad termométrica podría ser la presión del gas, etc.

Sea  $X$ , cualquiera de estas propiedades termométricas y escribamos:  $T(x) = \alpha X$ , donde,  $\alpha$  es un parámetro a ser evaluado. En este sentido, podemos decir: “**A iguales diferencias de temperaturas, corresponden iguales variaciones de la propiedad termométrica**” Lo anterior significa que, por ejemplo que cada vez que la columna de Mercurio cambia una unidad de longitud, entonces la temperatura variará una cantidad fija y definida, independientemente del valor de la temperatura inicial. Así, es posible escribir la identidad:

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2}$$

La determinación de  $\alpha$ , significa “calibrar” el termómetro. Para estos efectos, es necesario especificar un punto fijo patrón para el cual todos los termómetros deben para la

temperatura  $T$ , indicar la misma temperatura. De esta forma, como punto fijo se escoge aquél en el cual coexisten en equilibrio hielo, agua líquida y vapor de agua (conocido como **punto triple del agua**). La presión de vapor del agua en el punto triple es 4,58 mm de Hg y la temperatura es  $273,16 K$ . De esta forma, si designamos con el subíndice “0” el punto triple, podemos escribir directamente:  $T(X) = 273,16 \frac{X}{X_0}$ . Una de las preguntas que es

necesario formularse a esta altura de la discusión proviene del siguiente argumento: Se trata de saber si la temperatura de un sistema depende o no depende de la clase de termómetro que escojamos para medirla. La información experimental nos indica que aunque se utilicen diferentes termómetros de la misma especie, tales como termómetros de gas de volumen constante empleando distintos gases, observamos distintas lecturas de temperaturas para un sistema dado en un estado dado. Es por lo tanto, preciso avanzar hacia la definición de una escala de temperaturas completamente definida, para lo cual será preciso definir un termómetro patrón. Considerando la variación mínima de lecturas encontradas entre diversos termómetros de gas de volumen constante, se ha escogido un gas en calidad de sustancia termométrica general. De esta forma, conforme se reduce la cantidad de gas utilizada en el termómetro (reduciendo su presión), se produce una reducción en las variaciones en las diversas lecturas entre los diversos termómetros que utilizan diferentes clases de gases. **¡ Lo anterior sugiere que existe algo interesante en el comportamiento de un termómetro de gas a baja presión ¡**

Con relación al termómetro a gas: A una temperatura cualquiera, la presión de un gas depende de su volumen. De esta forma a volumen constante entonces podemos escribir una relación del tipo:  $T(P) = 273,16 \frac{P}{P_0}$ , a volumen constante. El termómetro de gas a

presión constante es más difícil de operar que el correspondiente a volumen constante y su diseño y construcción además de las correcciones que deben ser efectuadas para las lecturas de temperaturas son ciertamente más complicadas. De esta forma, el termómetro de volumen constante es el termómetro de gas de mayor aplicación.

En el caso particular de la temperatura de un gas ideal: Sabemos de la experiencia que las lecturas de las temperaturas de un termómetro de gas a volumen constante, dependen del gas utilizado para los valores corriente de presión de referencia. No obstante, en la medida que disminuye la presión de referencia, las lecturas de las temperaturas para termómetros de gas a volumen constante, con diversos gases se aproximan al mismo valor (es decir, se independizan del gas utilizado). De esta forma, definimos la temperatura de un gas ideal por medio de la expresión:

$$T = 273,16 \lim_{P_0 \rightarrow 0} \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ a volumen constante}$$

En conclusión, escogeremos como termómetro patrón uno de gas a volumen constante que utiliza una escala de temperatura, como la definida en la ecuación anterior.

Algunas observaciones:



1.-)No obstante que nuestra escala de temperaturas es independiente de las propiedades de cualquier gas en particular, depende en general de las propiedades de los gases. Para medir una temperatura dada, debe utilizarse un gas a esa temperatura. La temperatura mínima a la cual se puede medir con cualquier termómetro de gas es de un grado Kelvin. Para llegar a esta temperatura tan baja, es preciso utilizar Helio a baja presión (el Helio se licua a una temperatura menor que cualquier otro gas).

2.-)La definición del cero absoluto, requiere de una escala de temperaturas que sea independiente de las propiedades de cualquier sustancia en particular. La escala termodinámica goza de esta característica, la cual nos permitirá definir correctamente el cero absoluto.

3.-)No se debe pensar que en el cero absoluto se alcanza un estado de energía cero, sin movimiento. La idea que toda acción molecular cesa en el cero absoluto es incorrecta. La realidad nos indica que las moléculas de una sustancia en el cero absoluto tienen asociada una cantidad finita de energía cinética (energía en el punto cero). Así, la energía es mínima pero distinta de cero.

4.-)Uno de los efectos más comunes observados como consecuencia de los cambios de temperatura son los cambios de tamaño y de estado de los materiales. Focalicemos nuestra atención en los cambios de tamaño, sin variación en el estado. Así en el caso de un sólido, los núcleos se disponen en forma regular y periódica a lo largo de las tres direcciones del espacio físico. Sabemos que los núcleos constituyentes del sólido siempre vibran con amplitudes de vibración del orden  $10^{-9}$  cm y con una frecuencia del orden de  $10^{13}$  vib/seg .

Cuando aumentamos la temperatura, ciertamente incrementamos las amplitudes de las vibraciones de los núcleos constituyentes y por lo tanto, la distancia media entre éstos.

Lo descrito anteriormente conduce a la dilatación de todo cuerpo sólido conforme aumenta la temperatura. El cambio de cualquier dimensión lineal del sólido (longitud, ancho, alto) se llama **dilatación lineal**. Si la longitud de esta dimensión lineal es  $l$ , entonces el cambio de longitud derivado de un cambio de temperatura  $\Delta T$  es simplemente  $\Delta l$  y procedemos a escribir la igualdad:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

donde,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal, y es característico para el material en estudio.

El valor de este coeficiente representa la fracción de cambio de longitud por variación de cambio de temperatura. En rigor, los valores del coeficiente de dilatación lineal dependen de la temperatura, sin embargo las variaciones son pequeñas y por lo tanto sus valores se consideran como constantes para los materiales. Corrientemente, en un enfoque más riguroso se utilizan los valores medios, medidos en un intervalo de temperaturas entre 0 y 100 grados centígrados, con excepción del hielo para el cual el rango utilizado se mueve entre -10 y 0 grados centígrados.