

**Ejercicio 20** El consumo de un cierto repuesto sigue un patrón del tipo:

$$\lambda(t) = \lambda_0 (1 + \theta \sin \omega t), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

en u/ut. El valor de un repuesto es  $p_u$ . El costo de almacenamiento se evalúa con la tasa  $i$ . cada orden tiene un valor  $C_{ad}$ . El costo de falla de un repuesto no disponible en bodega es de  $c_w$  um/ut. Proponga un modelo para decidir de manera óptima,

1. el número de items ordenados en cada orden de compra;
2. la frecuencia con la que se hace un pedido;
3. la fracción de tiempo en que conviene disponer de repuestos.

### 32.8. Modelo con nivel de servicio

Consideremos un grupo de  $m$  componentes en uso durante un intervalo  $T$ . El tiempo medio entre fallas de cada componente es  $T_\mu$  ut y la desviación standard es  $T_\sigma$  ut. La bodega percibe una demanda promedio de:

$$\lambda = \frac{m}{T_\mu} \text{ u/ut} \quad (32.37)$$

luego, durante el intervalo  $T$  se piden en promedio:

$$\lambda T = \frac{m}{T_\mu} T \text{ u}$$

La probabilidad de que hayan *menos* de  $k$  fallas en el intervalo  $[0, T]$  es:

$$P(n < k) = P(T_n > T)$$

donde  $n$  es el numero total de fallas en el intervalo y  $T_n$  es el intervalo para que ocurran.

Si  $k$  es grande,  $T_n$  puede ser aproximada por una distribución normal con media ??:

$$\mu = T_\mu \frac{k}{m} \text{ ut}$$

y varianza:

$$\sigma^2 = \frac{T_\sigma^2 k}{m^2} \text{ ut}^2$$

Tenemos que :

$$P(n \leq k) = P(T_n \geq T) = 1 - \Phi(x_n)$$

donde , y:

$$x_n = \frac{T_n - \mu}{\sigma}$$

Si se desea que la probabilidad de no poder satisfacer inmediatamente una demanda con probabilidad  $p$ , se deben disponer de  $k_p$  repuestos al inicio de  $T$ :

$$k_p = \frac{x_n^p T_\sigma}{2 T_\mu} + \sqrt{\left(\frac{x_n^p T_\sigma}{2 T_\mu}\right)^2 + \frac{T m}{T_\mu}} \text{ u}$$

donde  $x_n^p$  es el nivel normalizado en la tabla de Gauss que asegura  $p$ .

La aplicación de la distribución normal es valida cuando  $T$  es grande con respecto a  $T_\mu/T_\sigma$ . En caso contrario, se puede utilizar la distribución de Poisson. Si las fallas pertenecen a una población con distribución exponencial, el numero de fallas en un periodo dado corresponde exactamente a una distribución exponencial; para otras distribuciones para el tiempo entre fallas es una buena aproximacion[33]. La

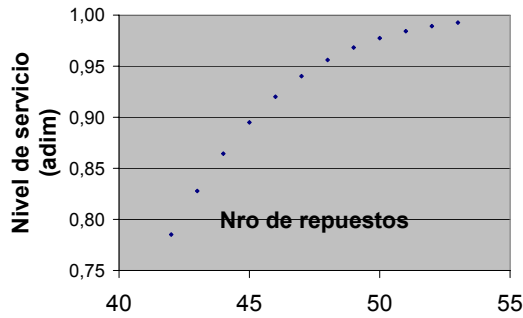


Figura 32.26: Estudio de sensibilidad para  $T = 5$  ut

probabilidad de que se consuman  $i$  componentes en un intervalo de duración  $T$  cuando en promedio se consumen  $\lambda$  u/ut (según ec. 32.37 en nuestro caso) es:

$$P(n = i) = \frac{(\lambda T)^i e^{-\lambda T}}{i!}$$

luego

$$P(n \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda T)^i e^{-\lambda T}}{i!} \quad (32.38)$$

Para asegurar un nivel de seguridad  $p$ ,

$$P(n \leq k) \geq p \quad (32.39)$$

### 32.9. Estudio en motores de correa

Una ut corresponde a un año,

$$\begin{aligned} m &= 62 \\ MTTF &= 8 \text{ ut} \\ MTTR &= 0,22 \text{ ut} \\ p &= 0,95 \\ T &= 1 \text{ y } 5 \text{ ut} \end{aligned}$$

Tenemos entonces,

$$MTBF = MTTF + MTTR = 8,22 \text{ ut}$$

La demanda percibida por la bodega es:

$$\lambda = \frac{m}{MTBF} = \frac{62}{8,22} \text{ u/ut}$$

Al evaluar (32.38) hasta cumplir (32.39) y con  $T = 5$ ,

$$n^* = 48 \text{ u}$$

La figura (32.28) muestra los valores óptimos en función de varios intervalos de análisis. Al acortar los plazos entre readquisiciones los costos de adquisición  $C_{ad}$  pueden ser importantes; al alargarlos se incrementan los costos de almacenamiento  $C_a$ . El tamaño del pedido al principio de cada intervalo es corregido en función de los niveles que se presenten. Los calculos en Excel pueden bajarse [aquí](#).

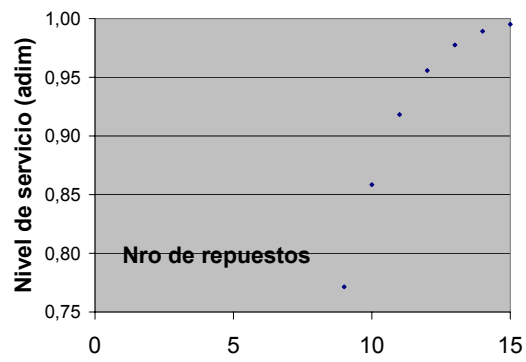


Figura 32.27: Estudio de sensibilidad para  $T = 1$  ut

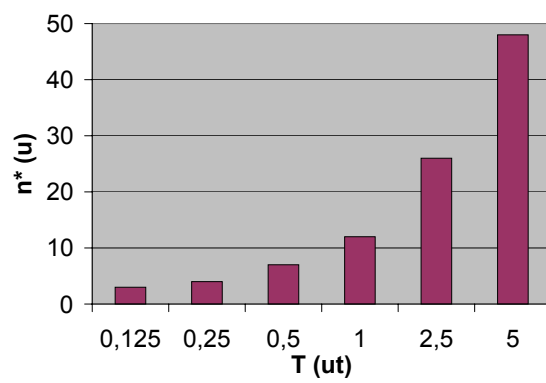


Figura 32.28: Niveles óptimos de stock para varios intervalos de análisis

Bodega	Planta (u/ut)		
	1	2	3
1	225	153	162
2	225	162	126

Cuadro 32.4: Costo de transporte (um/u)

### 32.10. Distribución de repuestos con varias bodegas y demanda distribuida

Consideremos la situación de una compañía que dispone de  $j = 1 \dots J$  plantas distantes unas de otras. A fin de abastecerlas de repuestos se dispone de  $i = 1 \dots I$  bodegas de repuestos. Para efectos simplificadores, todos los repuestos son considerados del mismo tipo.

- El costo de transferir un repuesto desde la bodega  $i$  a la planta  $j$  es  $C_{ij}$  um/u.
- Por limitaciones de espacio físico (y/o administrativas) la bodega  $i$  puede entregar hasta  $\mu_i$  u/ut.
- La planta  $j$  tiene una tasa de demanda de  $\lambda_j$  u/ut.
- Se desea conocer  $x_{ij}$ , la cantidad de repuestos que deben ser entregados por cada bodega a cada planta, por unidad de tiempo.
- El criterio de decisión es la minimización del costo total esperado por unidad de tiempo,  $c_g$ .

Las variables de decisión en este caso son los valores de la matriz  $\mathbf{X}$ . Los parámetros son los vectores  $\mu$ ,  $\lambda$ , y la matriz  $\mathbf{C}$ . Las restricciones son:

- Restricción de capacidad de cada bodega:

$$\sum_j x_{ij} \leq \mu_i \quad \forall i$$

- Satisfacer las demandas de cada planta:

$$\sum_i x_{ij} \geq \lambda_j \quad \forall j$$

La función objetivo es:

$$c_g = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} \quad \text{um/ut}$$

#### 32.10.1. Ejemplo

Presentamos un ejemplo adaptado a partir de (Rosenthal,1997??). Se consideran  $I = 2$  bodegas y  $J = 3$  plantas. La tabla (45.7) muestra los costos asociados.

Las tasas de demanda promedio de las plantas son 32.5, 30 y 27.5 u/ut respectivamente. La capacidades de las bodegas son de 35 y 60 u/ut.

El listing en GAMS [bajar]. es:

```
Sets
  i bodegas / bodega1, bodega2 /
  j plantas / planta1, planta2, planta3 / ;
Parameters
  mu(i) capacidad de la bodega i in cases
        / bodega1      35
          bodega2      60 /
```

la expresion (19.17) queda,

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{T e^{-\lambda T} + \int_0^T t \lambda e^{-\lambda t} dt}{T} \\ &\approx \frac{e^{-\lambda T} - 1}{\lambda T} \\ &\approx 1 - \frac{T \lambda}{2} \end{aligned} \quad (19.20)$$

cuando

$$\lambda T \ll 1$$

**Ejemplo 90** <sup>7</sup>Una planta petroquímica posee 1000 válvulas de seguridad en servicio. Actualmente son inspeccionadas una vez por año y aproximadamente 10 % de ellas son diagnosticadas como defectuosas tras la inspección. La duración de la inspección es 1 hora. El reemplazo toma 1 hora. Estime la frecuencia de inspecciones que asegure 99 % de disponibilidad. Si usamos el año como unidad de tiempo y asumimos una distribución exponencial, la tasa de fallas de una válvula es:

$$\lambda(T = 1) = 0,1 \text{ fallas/ut}$$

luego, si despreciamos los tiempos para inspeccionar y reemplazar (frente al intervalo entre inspecciones), la disponibilidad puede ser estimada a partir de (19.20),

$$A(T = 1) = 1 - \frac{1 \cdot 0,1}{2} = 0,95$$

o para el caso de interés,

$$A(T_{99}) = 1 - \frac{T_{99} \cdot 0,1}{2} = 0,99$$

luego,

$$T_{99} = 0,2 \text{ ut}$$

**Observación 57** Notemos que en este caso un reemplazo preventivo de las válvulas es inefectivo, pues la duración esperada de una válvula vieja es similar a la de una nueva ( $\beta = 1$ ).

## 19.8. Equipos cuya condición solo es determinada tras una inspección

Los equipos utilizados para producción pueden fallar también logrando productos fuera de tolerancia. En este caso, solo es posible determinar el estado de la máquina al inspeccionar la calidad de los productos. Cuando se detecta tal falla, el equipo es reparado y queda "como nuevo"<sup>8</sup>, para recomenzar un nuevo ciclo de producción. El problema es determinar el programa óptimo de inspecciones que minimicen el costo global por unidad de tiempo asociado a:

- inspecciones,
- mantenimientos correctivos y
- no detección de falla.

Sean:

1.  $f(t)$  es la función densidad de probabilidad de fallas del equipo
2.  $C_{i,i}$  es el costo de una inspección (um)

---

<sup>7</sup>control 3, 2005-II.

<sup>8</sup>con lo que  $t$  vuelve a 0.

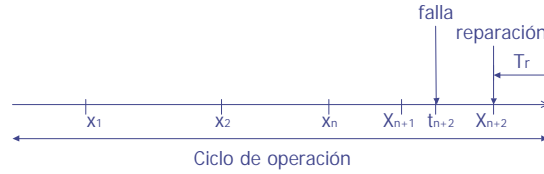


Figura 19.14: Ciclo de operación

3.  $c_f$  es el costo de falla por unidad de tiempo ( $um/ut$ ) asociado a una falla no detectada del equipo:
  - a) productos desechados por mala calidad
  - b) costo de reprocesar productos fuera de tolerancia
  - c) producción perdida
4.  $C_{i,r}$  es el costo de intervención de una reparación mas el costo de falla asociado,  $c_f T_r(um)$
5.  $T_r$  es el tiempo medio requerido para una reparación
6. La política de inspección consiste en realizar inspecciones en los instantes  $t_i$  hasta que una falla sea detectada (véase por ejemplo la ilustración 19.14). Los intervalos entre inspecciones no son necesariamente constantes pues pueden reducirse en la medida que la tasa de fallas aumente.
7. El objetivo es determinar el programa de inspecciones óptimo para minimizar el costo global por unidad de tiempo.

El costo global por unidad de tiempo  $c_g$  es función de los tiempo en que se realice inspección:

$$c_g = c_g(t_1, t_2, t_3, \dots)$$

La falla del equipo puede ocurrir en cualquier instante de cada intervalo  $(t_i, t_{i+1})$ .

Si por ejemplo la falla ocurre en el instante  $t$  en  $(0, t_1)$ , el costo del ciclo incluye el costo de una inspección, el costo de falla durante el tiempo en que no se ha detectado la falla y el costo de la reparación:

$$C_{i,i} + c_f(t_1 - t) + C_{i,r}$$

**Observación 58** Los productos fuera de tolerancia se han producido desde  $t$  hasta  $t_1$ , luego el costo de falla acumulado en este caso es  $c_f(t_1 - t)$ .

cuyo valor esperado es

$$\int_0^{t_1} [1 \cdot C_{i,i} + c_f(t_1 - t) + C_{i,r}] f(t) dt$$

Si la falla ocurre en  $(t_1, t_2)$ , en el instante  $t$ , el costo del ciclo sería

$$2 \cdot C_{i,i} + c_f(t_2 - t) + C_{i,r}$$

y el valor esperado sería

$$\int_{t_1}^{t_2} [2 \cdot C_{i,i} + c_f(t_2 - t) + C_{i,r}] f(t) dt$$

**Observación 59** Tras una inspección que indica que la maquina produce dentro de las tolerancias la confiabilidad no es afectada, ella sigue decreciendo.