

EJEMPLO 12-1

La viga en voladizo mostrada en la figura 12-10a está sometida a una carga vertical P en su extremo. Determine la ecuación de la curva elástica. EI es constante.

SOLUCIÓN I

Curva elástica. La carga tiende a deflexionar la viga como se muestra en la figura 12-10a. Por inspección, el momento interno puede representarse en toda la viga usando una sola coordenada x .

Función momento. Del diagrama de cuerpo libre, con M actuando en la dirección positiva, figura 12-10b, tenemos:

$$M = -Px$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 12-10 e integrando dos veces, resulta:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -Px \quad (1)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (2)$$

$$EI v = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (3)$$

Usando las condiciones de frontera $dv/dx = 0$ en $x = L$ y $v = 0$ en $x = L$, ecuaciones 2 y 3, se obtiene:

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$

Resolviendo simultáneamente, obtenemos: $C_1 = PL^2/2$ y $C_2 = -PL^3/3$. Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones 2 y 3 con $\theta = dv/dx$, obtenemos:

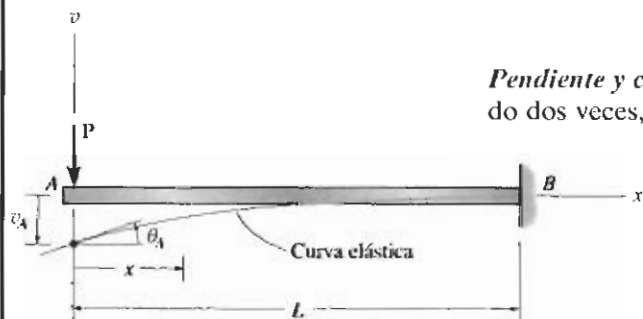
$$\theta = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \quad \text{Resp.}$$

La pendiente y el desplazamiento máximos ocurren en $A(x = 0)$, que son:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \quad (4)$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (5)$$



(a)



(b)

Figura 12-10

El resultado *positivo* para θ_A indica una rotación *antihorario* y el resultado *negativo* para v_A indica que v_A es *hacia abajo*. Esto concuerda con los resultados esbozados en la figura 12-10a.

Para obtener alguna idea sobre la *magnitud* real de la pendiente y el desplazamiento en el extremo A, consideremos que la viga en la figura 12-10a tiene una longitud de 15 pies, que soporta una carga $P = 6$ kip y que está hecha de acero A-36 con $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi. Usando los métodos de la sección 11.3, encontramos que una $W12 \times 26$ ($I = 204$ pulg⁴) es adecuada, si esta viga se diseña sin un factor de seguridad y suponiendo que el esfuerzo normal permisible es igual al esfuerzo de fluencia $\sigma_{perm} = 36$ ksi. De las ecuaciones 4 y 5 obtenemos:

$$\theta_A = \frac{6 \text{ kip}(15 \text{ pies})^2(12 \text{ pulg/pie})^2}{2[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](204 \text{ pulg}^4)} = 0.0164 \text{ rad}$$

$$v_A = -\frac{6 \text{ kip}(15 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}{3[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](204 \text{ pulg}^4)} = -1.97 \text{ pulg}$$

Como $\theta_A^2 = (dv/dx)^2 = 0.000269 \text{ rad}^2 \ll 1$, esto justifica el uso de la ecuación 12-10 en vez de la aplicación de la ecuación 12-4 más exacta, para el cálculo de la deflexión de vigas. Además, como esta aplicación numérica es para una *viga en voladizo*, hemos obtenido *valores mayores* para θ y v que los que habríamos obtenido si la viga hubiese estado simplemente apoyada, conectada por pasadores, rodillos u otros soportes fijos.

SOLUCIÓN II

Este problema puede también resolverse usando la ecuación 12-8, $EI d^4v/dx^4 = -w(x)$. Aquí, $w(x) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, figura 12-10a, de manera que al integrar una vez, obtenemos la forma de la ecuación 12-9, es decir,

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = C_1' = V$$

La constante de cortante C_1' puede evaluarse en $x = 0$ puesto que $V_A = -P$ (negativa de acuerdo con la convención de signos para vigas, figura 12-8a). Así, $C_1' = -P$. Integrando nuevamente obtenemos la forma de la ecuación 12-10, esto es,

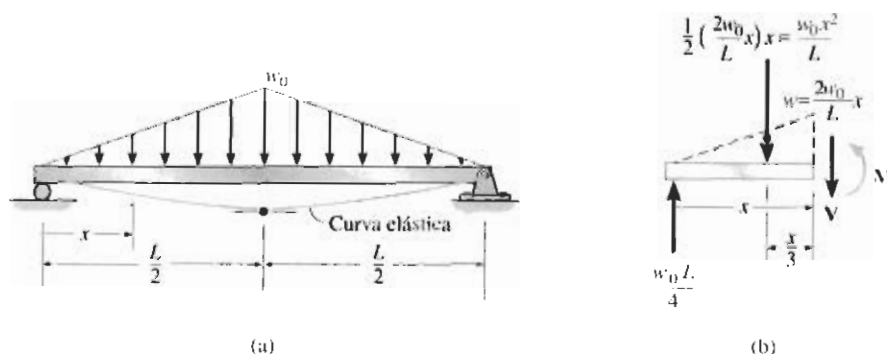
$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = -P$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -Px + C_2' = M$$

Aquí $M = 0$ en $x = 0$, por lo que $C_2' = 0$ y se obtiene entonces la ecuación 1 y la solución procede como antes.

EJEMPLO 12-2

La viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 12-11a soporta una carga triangular distribuida. Determine su deflexión máxima. EI es constante.

**Figura 12-11****SOLUCIÓN I**

Curva elástica. Debido a la simetría, sólo se requiere una coordenada x para la solución, en este caso $0 \leq x \leq L/2$. La viga se deflexiona como se muestra en la figura 12-11a. Note que la deflexión máxima se presenta en el centro del claro, ya que la pendiente en este punto es cero.

Función momento. La carga distribuida actúa hacia abajo, por lo que es positiva de acuerdo con nuestra convención de signos. En la figura 12-11b se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo. La ecuación para la carga distribuida es:

$$w = \frac{2w_0}{L}x$$

Por tanto,

$$\zeta^+ \sum M_{NA} = 0; \quad M + \frac{w_0 x^2}{L} \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{w_0 L}{4} (x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0 x^3}{3L} + \frac{w_0 L}{4} x$$

Pendiente y curva elástica. Usando la ecuación 12-10 e integrando dos veces, tenemos:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x \quad (1)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración se obtienen aplicando la condición de frontera $v = 0$ en $x = 0$ y la condición de simetría $dv/dx = 0$ en $x = L/2$. Esto conduce a:

$$C_1 = -\frac{5w_0L^3}{192} \quad C_2 = 0$$

Por tanto,

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5w_0L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5w_0L^3}{192}x$$

Determinamos la deflexión máxima en $x = L/2$, y obtenemos:

$$v_{\max} = -\frac{w_0L^4}{120EI} \quad \text{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Comenzando con la carga distribuida, ecuación 1, y aplicando la ecuación 12-8, tenemos:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{2w_0}{L}x$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + C'_1$$

Como $V = +w_0L/4$ en $x = 0$, entonces $C'_1 = w_0L/4$. Integrando de nuevo, obtenemos:

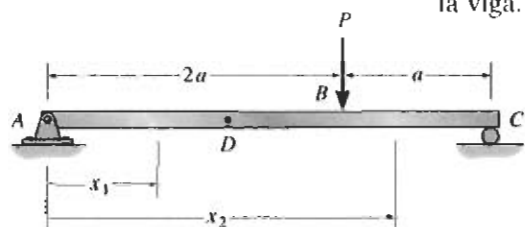
$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{L}x^3 + \frac{w_0L}{4}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x + C'_2$$

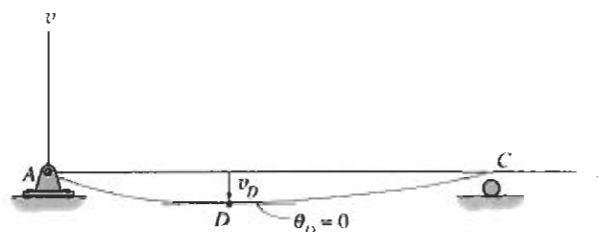
Aquí, $M = 0$ en $x = 0$, por lo que $C'_2 = 0$. Esto nos da la ecuación 1. La solución se obtiene ahora igual que antes.

EJEMPLO 12-3

La viga simplemente apoyada mostrada en la figura 12-12a está sometida a la fuerza P concentrada. Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



(a)

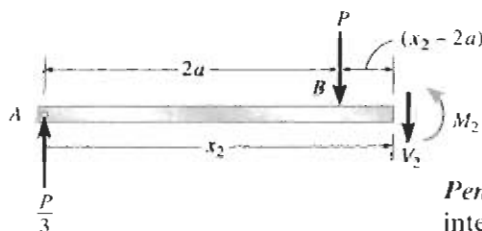
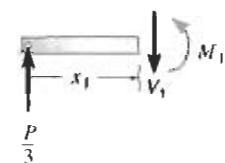


(b)

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga se deflexiona como se muestra en la figura 12-12b. Deben usarse dos coordenadas ya que el momento es discontinuo en P . Consideraremos aquí x_1 y x_2 con el mismo origen en A , de manera que $0 \leq x_1 < 2a$ y $2a < x_2 \leq 3a$.

Función momento. De los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 12-12c,



(c)

Figura 12-12

$$M_1 = \frac{P}{3}x_1$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x_2 - P(x_2 - 2a) = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 12-10 para M_1 e integrando dos veces, obtenemos:

$$EI \frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{3}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (2)$$

Igualmente, para M_2 ,

$$EI \frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2P}{3}\left(3ax_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3 \quad (3)$$

$$EIv_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}ax_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3x_2 + C_4 \quad (4)$$

Las cuatro constantes se evalúan usando *dos* condiciones de frontera, esto es, $x_1 = 0, v_1 = 0$ y $x_2 = 3a, v_2 = 0$. Además, deben aplicarse dos condiciones de continuidad en B , es decir, $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$ y $v_1 = v_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$. Sustituyendo los valores indicados se obtienen las cuatro ecuaciones siguientes:

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ en } x_2 = 3a; \quad 0 = \frac{2P}{3} \left(\frac{3}{2} a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6} \right) + C_3(3a) + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}$$

$$\frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3} \left(3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2} \right) + C_3$$

$$v_1(2a) = v_2(2a)$$

$$\frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3} \left(\frac{3}{2} a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6} \right) + C_3(2a) + C_4$$

Resolviendo esas ecuaciones obtenemos:

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \quad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Así, las ecuaciones 1-4 se transforman en:

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6EI}x_1^2 - \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (5)$$

$$v_1 = \frac{P}{18EI}x_1^3 - \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI}x_1 \quad (6)$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^2 - \frac{22}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (7)$$

$$v_2 = \frac{Pa}{EI}x_2^2 - \frac{P}{9EI}x_2^3 - \frac{22}{9} \frac{Pa^2}{EI}x_2 + \frac{4}{3} \frac{Pa^3}{EI} \quad (8)$$

Por inspección de la curva elástica, figura 12-12b, la deflexión máxima ocurre en D , en algún punto dentro de la región AB . Ahí la pendiente debe ser cero. De la ecuación 5,

$$\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{4}{9}a^2 = 0$$

$$x_1 = 1.633a$$

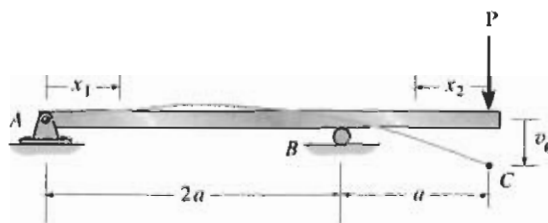
Sustituyendo en la ecuación 6,

$$v_{\text{máx}} = -0.484 \frac{Pa^3}{EI} \quad \text{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

EJEMPLO 12-4

La viga en la figura 12-13a está sometida a una carga P en su extremo. Determine el desplazamiento en C . EI es constante.



(a)

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga se deflexiona según la forma mostrada en la figura 12-13a. Debido a la carga, se considerarán dos coordenadas x , esto es, $0 \leq x_1 < 2a$ y $0 \leq x_2 < a$, donde x_2 está dirigida hacia la izquierda desde C , puesto que el momento se puede expresar en forma más sencilla.

Funciones momento. Usando los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 12-13b, tenemos:

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \quad M_2 = -Px_2$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 12-10,

$$\text{para } 0 \leq x_1 < 2a, \quad EI \frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

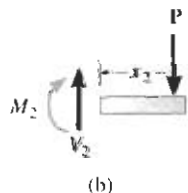
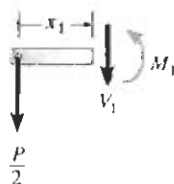
$$EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (2)$$

$$\text{Para } 0 \leq x_2 < a, \quad EI \frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -Px_2$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{P}{2}x_2^2 + C_3 \quad (3)$$

$$EIv_2 = -\frac{P}{6}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \quad (4)$$

Las cuatro constantes de integración se determinan usando tres condiciones de frontera, que son $v_1 = 0$ en $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ en $x_1 = 2a$, y $v_2 = 0$ en $x_2 = a$, más una ecuación de continuidad. La continuidad de la pendiente en el rodillo requiere que $dv_1/dx_1 = -dv_2/dx_2$ en $x_1 = 2a$ y $x_2 = a$. ¿Por qué se tiene un signo negativo en esta ecuación? (Note que la continuidad del desplazamiento en B se ha considerado indirectamente en las condiciones de frontera, puesto que $v_1 = v_2 = 0$ en $x_1 = 2a$ y $x_2 = a$.) Aplicando esas cuatro condiciones se obtiene

**Figura 12-13**

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 2a; \quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ en } x_2 = a; \quad 0 = -\frac{P}{6}a^3 + C_3a + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(a)}{dx_2}; \quad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = -\left(-\frac{P}{2}(a)^2 + C_3\right)$$

Despejando, obtenemos:

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{7Pa^2}{6} \quad C_4 = -Pa^3$$

Sustituyendo C_3 y C_4 en la ecuación 4, resulta:

$$v_2 = -\frac{P}{6EI}x_2^3 + \frac{7Pa^2}{6EI}x_2 - \frac{Pa^3}{EI}$$

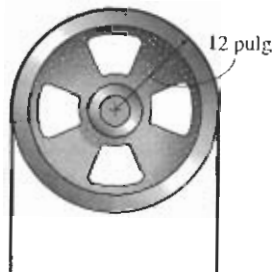
El desplazamiento en C se determina haciendo $x_2 = 0$. El resultado es:

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI}$$

PROBLEMAS

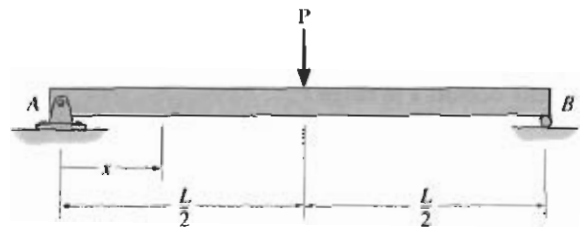
12-1 Una banda de acero L2 con espesor de 0.125 pulg y ancho de 2 pulg se dobla formando un arco circular de radio igual a 600 pulg. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la banda.

12-2 La hoja de acero L2 de la sierra de cinta se enrolla en la polea de 12 pulg de diámetro. Determine el esfuerzo normal máximo en la hoja. Ésta es de acero con ancho de 0.75 pulg y espesor de 0.0625 pulg.



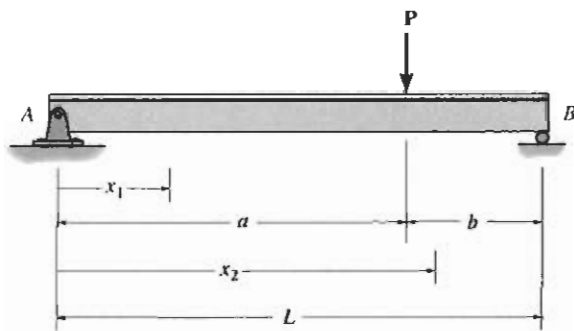
Problema 12-2

12-3 Determine la ecuación de la curva elástica para la viga usando la coordenada x , válida para $0 \leq x < L/2$. Especifique la pendiente en A y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



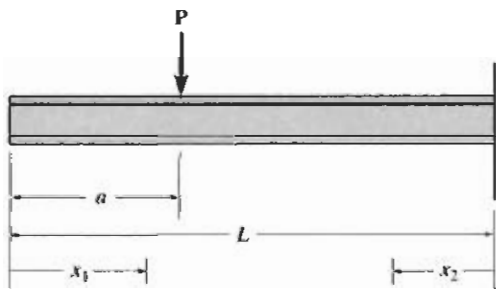
Problema 12-3

***12-4** Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 . EI es constante.



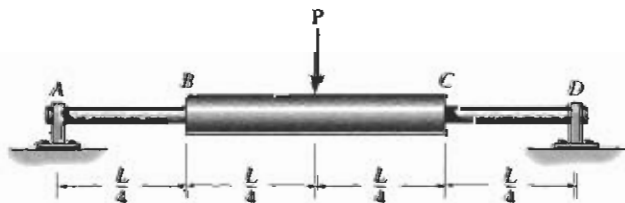
Problema 12-4

12-5 Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 . EI es constante.



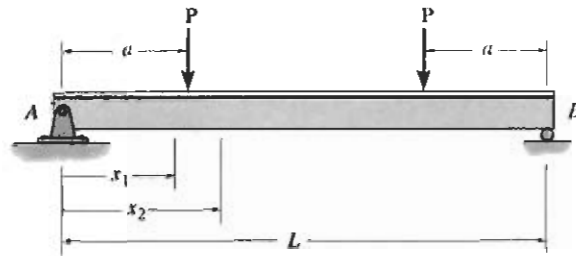
Problema 12-5

12-6 La flecha simplemente apoyada tiene un momento de inercia de $2I$ en la región BC y un momento de inercia I en las regiones AB y CD . Determine la deflexión máxima de la flecha debido a la carga P .



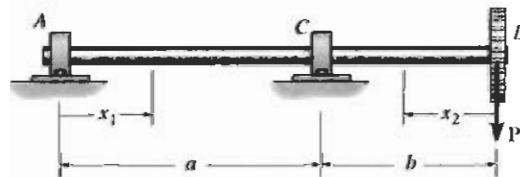
Problema 12-6

12-7 Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2 . Especifique la pendiente en A y la deflexión máxima. EI es constante.



Problema 12-7

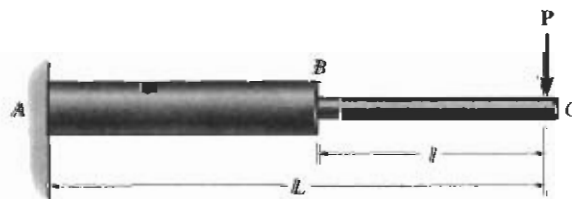
***12-8** La flecha está soportada en A por un cojinete que ejerce sólo reacción vertical sobre la flecha y en C por un cojinete de empuje que ejerce reacciones horizontal y vertical sobre la flecha. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 . EI es constante.



Problema 12-8

12-9 La viga está formada por dos barras y está sometida a la carga concentrada P . Determine la deflexión máxima de la viga si los momentos de inercia de las barras son I_{AB} e I_{BC} y el módulo de elasticidad es E .

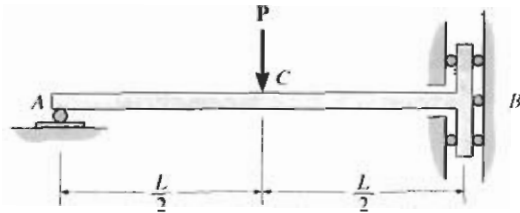
12-10 La viga está formada por dos barras y está sometida a la carga concentrada P . Determine la pendiente en C. Los momentos de inercia de las barras son I_{AB} e I_{BC} y el módulo de elasticidad es E .



Problemas 12-9/12-10

12-11 La barra está soportada por un empotramiento guiado en B que permite desplazamientos verticales pero resiste carga axial y momento. El soporte en A es un rodillo. Determine la pendiente en A y la deflexión en C cuando la barra está sometida a la carga mostrada. EI es constante.

***12-12** Determine la deflexión de la barra en B del problema 12-11.



Problemas 12-11/12-12

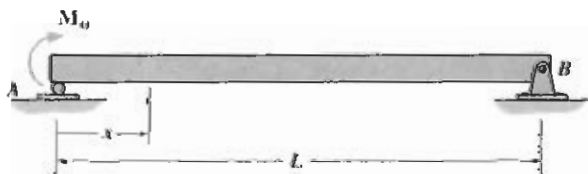
12-13 Determine la curva elástica para la viga en voladizo sometida al momento concentrado M_0 . Calcule también la pendiente máxima y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



Problema 12-13

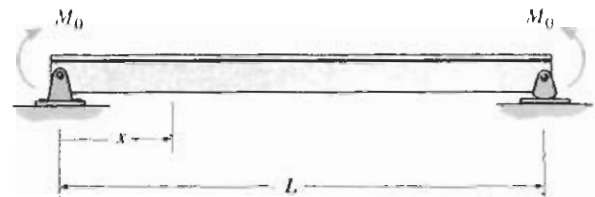
12-14 Determine la ecuación de la curva elástica para la viga usando la coordenada x . Especifique la pendiente en A y la máxima deflexión. EI es constante.

12-15 Determine la deflexión en el centro de la viga y su deflexión en B . EI es constante.



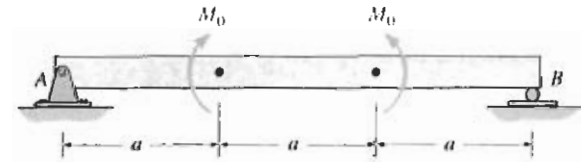
Problemas 12-14/12-15

***12-16** Determine la curva elástica para la viga simplemente apoyada sometida a los momentos concentrados M_0 . Calcule también la pendiente máxima y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



Problema 12-16

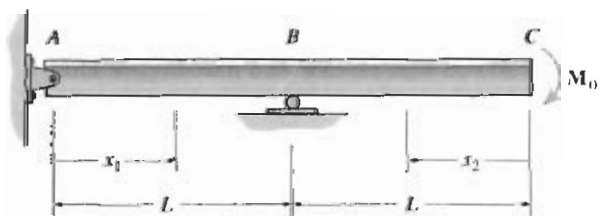
12-17 Determine la máxima deflexión de la viga y su pendiente en A . EI es constante.



Problema 12-17

12-18 Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 , y especifique la deflexión y la pendiente en C . EI es constante.

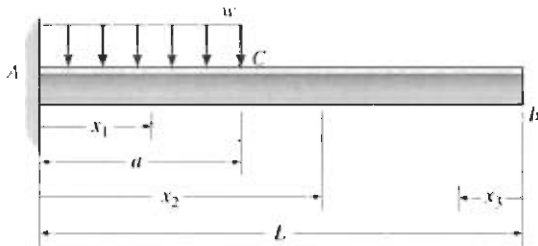
12-19 Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 , y especifique la pendiente en A . EI es constante.



Problemas 12-18/12-19

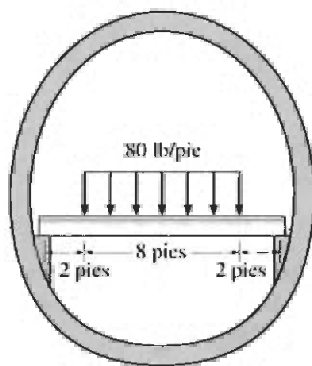
***12-20** Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 , y especifique la pendiente y la deflexión en B . EI es constante.

12-21 Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_3 , y especifique la pendiente y la deflexión en el punto B . EI es constante.



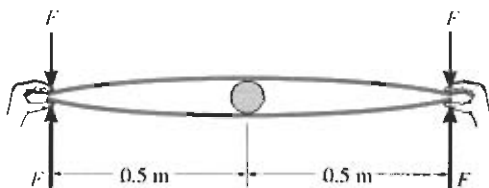
Problemas 12-20/12-21

12-22 La viga de piso de un avión está sometida a la carga mostrada. Suponiendo que el fuselaje ejerce sólo reacciones verticales sobre los extremos de la viga, determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



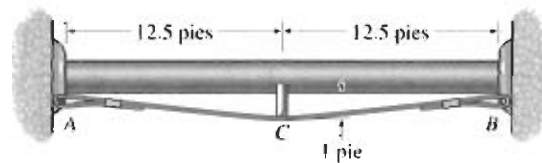
Problema 12-22

12-23 Las dos reglas de madera están separadas en sus centros por un cilindro rígido liso de 50 mm de diámetro. Determine la fuerza F que debe aplicarse en cada extremo para que sus extremos apenas se toquen. Cada regla tiene un ancho de 20 mm y un espesor de 5 mm. $E_{\text{madera}} = 11 \text{ GPa}$.



Problema 12-23

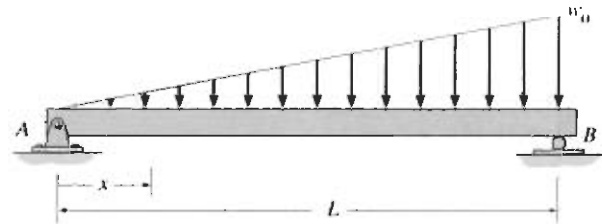
***12-24** Puede suponerse que el tubo está soportado por rodillos en sus extremos y por una barra rígida C en su centro. La barra descansa sobre un cable conectado a los soportes. Determine la fuerza que debe desarrollarse en el cable si la barra impide que el tubo se deflexione en su centro. El tubo y el fluido contenido tienen un peso combinado de 125 lb/pie. EI es constante.



Problema 12-24

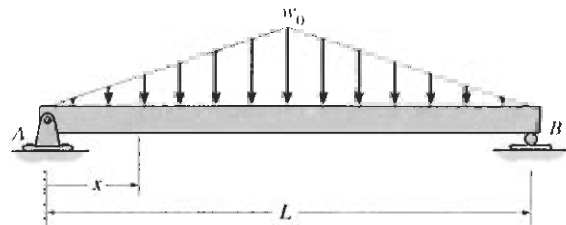
12-25 La viga está sometida a una carga distribuida linealmente variable. Determine la pendiente máxima de la viga. EI es constante.

12-26 La viga está sometida a una carga distribuida linealmente variable. Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



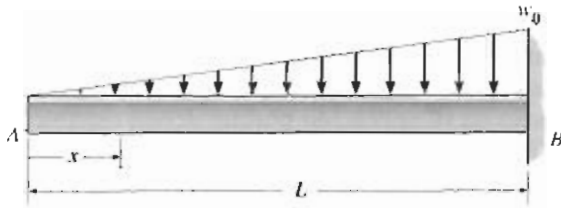
Problemas 12-25/12-26

12-27 Determine la curva elástica para la viga simplemente apoyada usando la coordenada x , válida en $0 \leq x \leq L/2$. Determine también la pendiente en A y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



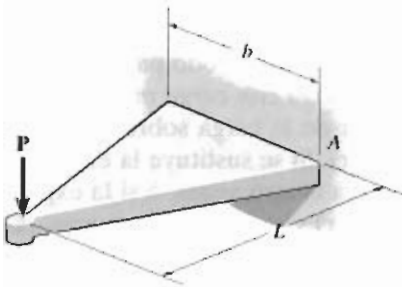
Problema 12-27

***12-28** Determine la curva elástica para la viga en voladizo usando la coordenada x . Determine también la pendiente y deflexión máximas. EI es constante.



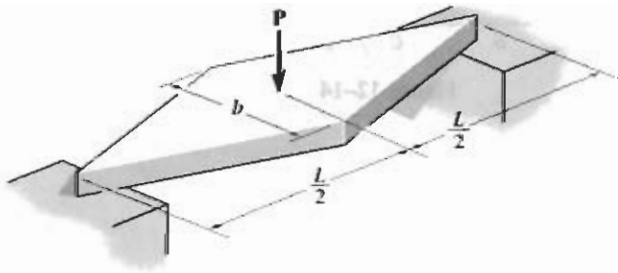
Problema 12-28

12-29 La viga ahusada tiene una sección transversal rectangular. Determine la deflexión de su extremo en términos de la carga P , longitud L , módulo de elasticidad E y momento de inercia I_0 de su extremo empotrado.



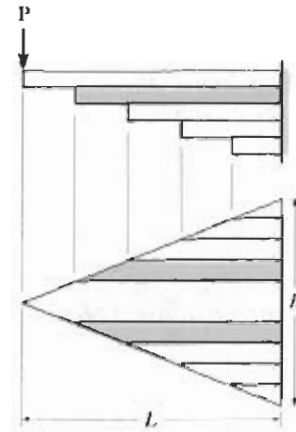
Problema 12-29

12-30 La viga ahusada tiene una sección transversal rectangular. Determine la deflexión de su centro en términos de la carga P , longitud L , módulo de elasticidad E y momento de inercia I_c de su centro.



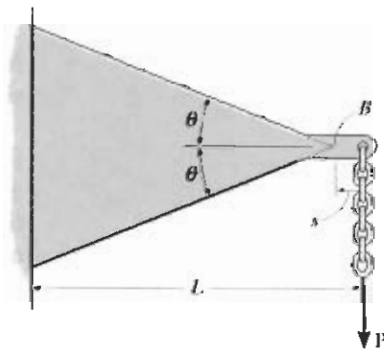
Problema 12-30

12-31 La viga está hecha de una placa que tiene espesor constante t y ancho que varía linealmente. La placa está cortada en franjas para formar una serie de hojas encimadas que funcionan como resorte de n hojas. Determine la deflexión en su extremo al estar sometido a carga. Desprecie la fricción entre las hojas.



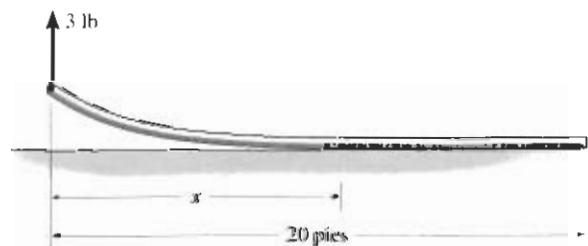
Problema 12-31

12-32 La viga tiene un ancho b constante y está ahusada como se muestra. Si soporta una carga P en su extremo, determine la deflexión en B . La carga P se aplica a una corta distancia s del extremo B , donde $s \ll L$. EI es constante.



Problema 12-32

12-33 Una barra flexible delgada de 20 pies de largo con peso de 0.5 lb/pie descansa sobre una superficie lisa. Si se aplica una fuerza de 3 lb en su extremo para levantarla, determine la longitud x suspendida y el momento máximo desarrollado en la barra.



Problema 12-33

EJEMPLO 12-7

Determine la pendiente de la viga mostrada en la figura 12-23a en los puntos B y C . EI es constante.

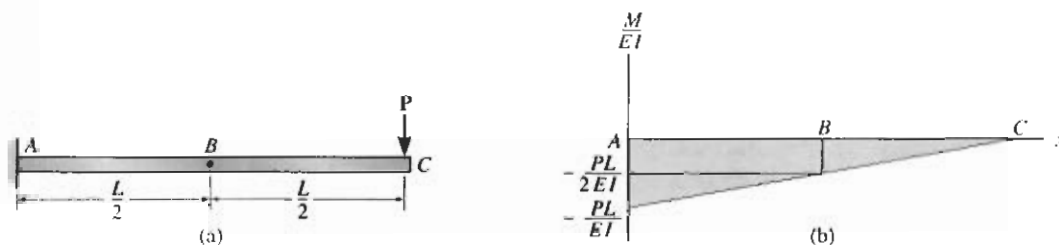


Figura 12-23

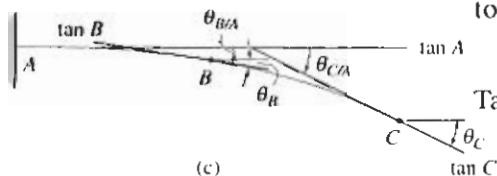
SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-23b.

Curva elástica. La fuerza P ocasiona que la viga se deflexione como se muestra en la figura 12-23c. (La curva elástica es cóncava hacia abajo puesto que M/EI es negativo.) Las tangentes en B y C están indicadas ya que se requiere encontrar θ_B y θ_C . Se muestra también la tangente en el soporte A . Esta tangente tiene una pendiente conocida igual a cero. Por construcción, el ángulo entre $\tan A$ y $\tan B$, esto es, $\theta_{B/A}$, es equivalente a θ_B , o

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$



(c)

También,

Teorema área-momento. Aplicando el teorema 1, $\theta_{B/A}$ es igual al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y B ; es decir:

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta_{B/A} &= \left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \\ &= -\frac{3PL^2}{8EI} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

El signo negativo indica que el ángulo medido de la tangente en A a la tangente en B es horario. Esto concuerda, ya que la viga se inclina hacia abajo en B .

De manera similar, el área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C es igual a $\theta_{C/A}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_C = \theta_{C/A} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L \\ &= -\frac{PL^2}{2EI} \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 12-8

Determine el desplazamiento de los puntos B y C de la viga mostrada en la figura 12-24a. EI es constante.

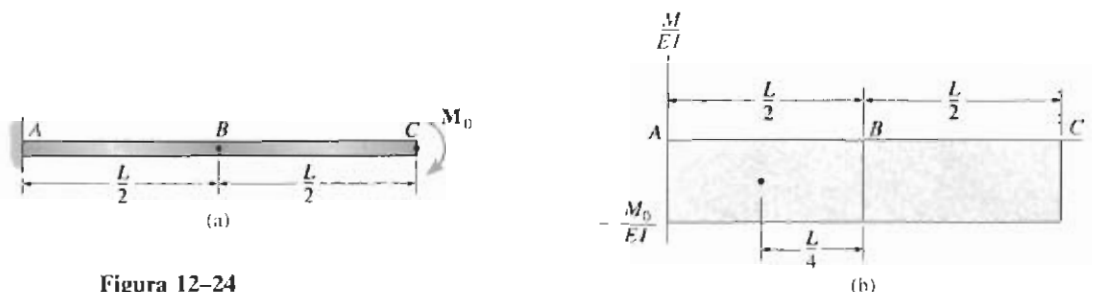


Figura 12-24

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-24b.

Curva elástica. El momento concentrado en C ocasiona que la viga se deflexione como se muestra en la figura 12-24c. Se trazan las tangentes en B y C puesto que queremos encontrar Δ_B y Δ_C . Además, se muestra la tangente en el soporte (A), por ser horizontal. Los desplazamientos requeridos pueden ahora relacionarse directamente a las desviaciones entre las tangentes en B y A y C y A . Específicamente, Δ_B es igual a la desviación de la tangente en A desde la tangente en B ; esto es,

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

También,

$$\Delta_C = t_{C/A}$$

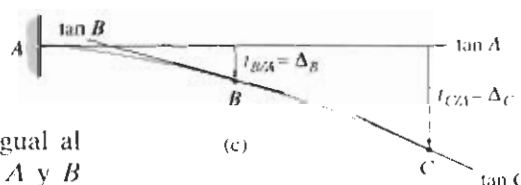
Teorema área-momento. Aplicando el teorema 2, $t_{B/A}$ es igual al momento del área sombreada bajo el diagrama M/EI entre A y B calculado respecto al punto B (el punto sobre la curva elástica), ya que este es el punto donde debe determinarse la desviación tangencial. Por consiguiente, de la figura 12-24b,

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left(\frac{L}{4} \right) \left[\left(-\frac{M_0}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right] = -\frac{M_0 L^2}{8EI} \quad \text{Resp.}$$

Igualmente, para obtener $t_{C/A}$ debemos determinar el momento del área bajo *todo* el diagrama M/EI , de A a C respecto al punto C (el punto sobre la curva elástica). Tenemos:

$$\Delta_C = t_{C/A} = \left(\frac{L}{2} \right) \left[\left(-\frac{M_0}{EI} \right) (L) \right] = -\frac{M_0 L^2}{2EI} \quad \text{Resp.}$$

Como ambas respuestas son *negativas*, ellas indican que los puntos B y C se encuentran debajo de la tangente en A . Esto concuerda con la figura 12-24c.



EJEMPLO 12-9

Determine la pendiente en el punto C de la viga en la figura 12-25a. EI es constante.

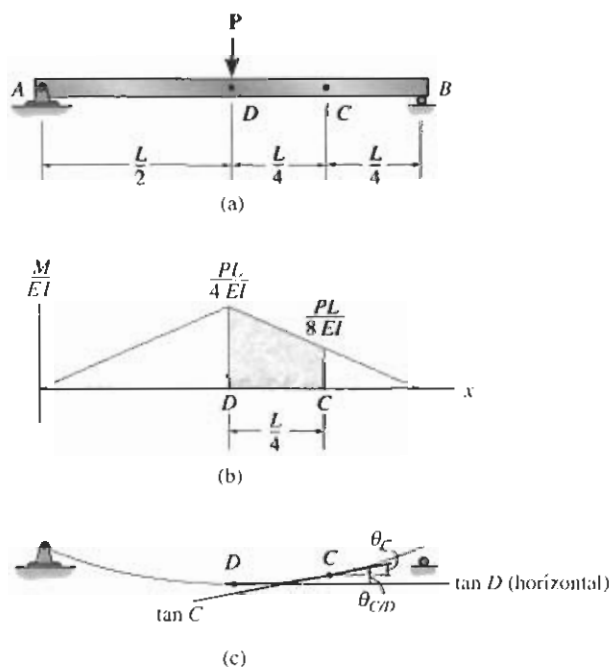
**Figura 12-25****SOLUCIÓN**

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-25b.

Curva elástica. Como la carga está aplicada simétricamente a la viga, la curva elástica es simétrica y la tangente en D es horizontal, como se muestra en la figura 12-25c. Se dibujan tangentes en C ya que debemos encontrar la pendiente θ_C y en D . Por construcción, el ángulo $\theta_{C/D}$ entre la tangente en D y la tangente en C es igual a θ_C ; esto es,

$$\theta_C = \theta_{C/D}$$

Teorema área-momento. Usando el teorema 1, $\theta_{C/D}$ es igual al área sombreada bajo el diagrama M/EI entre los puntos D y C . Tenemos:

$$\theta_C = \theta_{C/D} = \left(\frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} - \frac{PL}{8EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3PL^2}{64EI} \quad \text{Resp.}$$

¿Qué indica el resultado positivo?

EJEMPLO 12-10

Determine la pendiente en el punto C en la viga de acero mostrada en la figura 12-26a. Considere $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$, $I = 17(10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-26b.

Curva elástica. La curva elástica se muestra en la figura 12-26c. Se muestra la tangente en C puesto que queremos encontrar θ_C . Se trazan también las tangentes en los soportes A y B , tal como se muestra. El ángulo $\theta_{C/A}$ es el ángulo entre las tangentes en A y C . La pendiente en A , θ_A , en la figura 12-26c, puede encontrarse usando $|\theta_A| = |t_{B/A}|/L_{AB}$. Esta ecuación es válida ya que $t_{B/A}$ es en realidad muy pequeña, por lo que θ_A en radianes puede aproximarse por la longitud de un arco circular definido por un radio $L_{AB} = 8 \text{ m}$ y un barrido de θ_A . (Recuerde que $s = \theta r$.) De la geometría de la figura 12-26c, tenemos:

$$|\theta_C| = |\theta_A| - |\theta_{C/A}| = \frac{t_{B/A}}{8} - |\theta_{C/A}| \quad (1)$$

Note que el ejemplo 12-9 también podría haber sido resuelto usando este método.

Teoremas área-momento. Usando el teorema 1, $\theta_{C/A}$ es equivalente al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C ; es decir,

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(2 \text{ m})\left(\frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI}\right) = \frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

Aplicando el teorema 2, $t_{B/A}$ es equivalente al momento del área bajo el diagrama M/EI entre B y A respecto al punto B (el punto sobre la curva elástica), ya que éste es el punto donde va a determinarse la desviación tangencial. Tenemos:

$$\begin{aligned} t_{B/A} &= \left(2 \text{ m} + \frac{1}{3}(6 \text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(6 \text{ m})\left(\frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI}\right)\right] \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}(2 \text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(2 \text{ m})\left(\frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI}\right)\right] \\ &= \frac{320 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 1, obtenemos:

$$\theta_C = \frac{320 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{8EI} - \frac{8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} = \frac{32 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow$$

Hemos calculado este resultado en unidades de kN y m ; entonces, al convertir EI a esas unidades, el resultado es:

$$\theta_C = \frac{32 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 \cdot 17(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.00941 \text{ rad} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

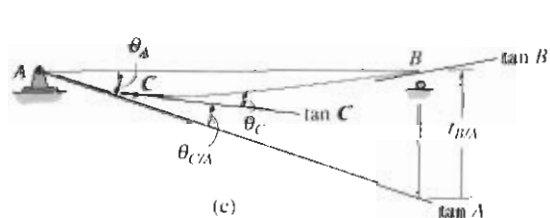
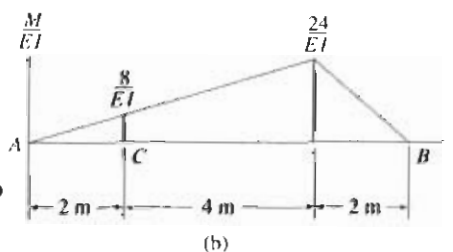
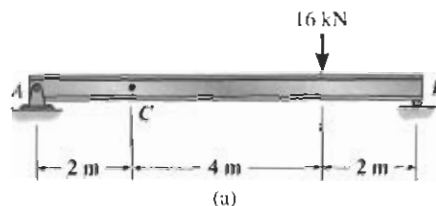


Figura 12-26

EJEMPLO 12-11

Determine el desplazamiento en C para la viga mostrada en la figura 12-27a. EI es constante.

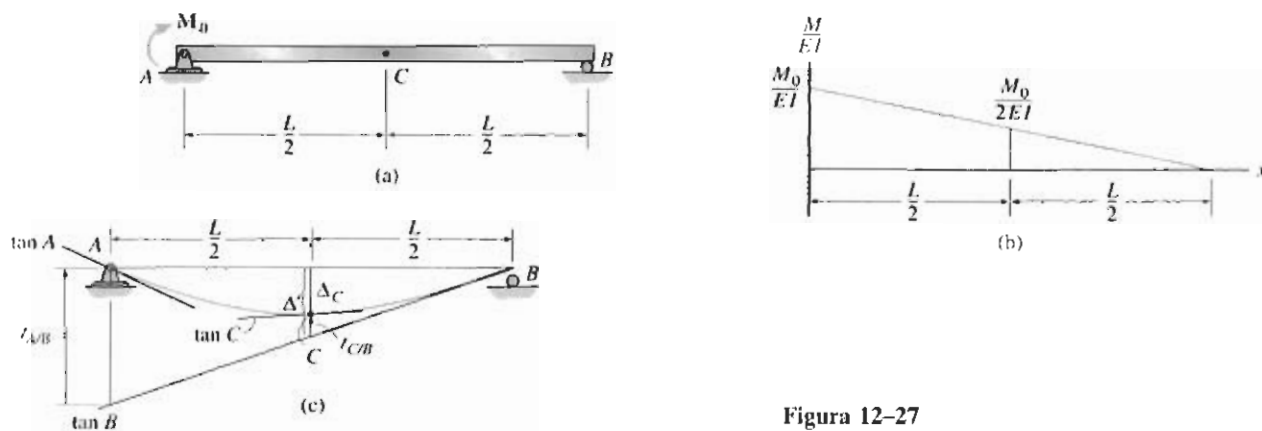


Figura 12-27

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-27b.

Curva elástica. Se dibuja la tangente en C ya que tenemos que encontrar Δ_C , figura 12-27c. (Note que C no es la posición de la deflexión máxima de la viga debido a que la carga y por consiguiente la curva elástica no son simétricas.) En la figura 12-27c están indicadas también las tangentes en los soportes A y B . Se ve que $\Delta_C = \Delta' - t_{C/B}$. Si se determina $t_{A/B}$, Δ' puede encontrarse por triángulos semejantes, esto es, $\Delta'/(L/2) = t_{A/B}/L$ o $\Delta' = t_{A/B}/2$. Por consiguiente,

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \quad (1)$$

Teorema área-momento. Aplicando el teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$, tenemos:

$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{3}(L) \right) \left[\frac{1}{2}(L) \left(\frac{M_0}{EI} \right) \right] = \frac{M_0 L^2}{6EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{M_0}{2EI} \right) \right] = \frac{M_0 L^2}{48EI}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 1, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_0 L^2}{6EI} \right) - \left(\frac{M_0 L^2}{48EI} \right) \\ &= \frac{M_0 L^2}{16EI} \downarrow \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 12-12

Determine el desplazamiento en el punto C para la viga de acero con voladizo mostrada en la figura 12-28a. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $I = 125$ pulg⁴.

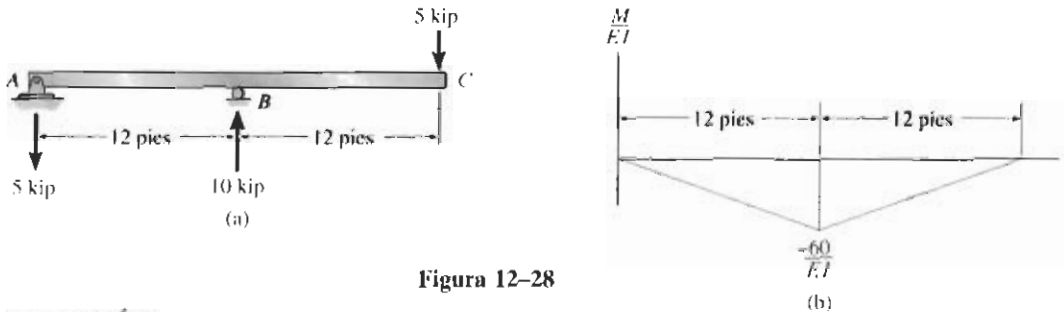


Figura 12-28

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . Vea la figura 12-28b.

Curva elástica. La carga ocasiona que la viga se deflexione como se muestra en la figura 12-28c. Queremos determinar Δ_C . Trazando tangentes en C y en los soportes A y B , vemos que $\Delta_C = |t_{C/A}| - \Delta'$. Sin embargo, Δ' puede relacionarse con $t_{B/A}$ por triángulos semejantes; esto es, $\Delta'/24 = |t_{B/A}|/12$ o $\Delta' = 2|t_{B/A}|$. Por consiguiente,

$$\Delta_C = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}| \quad (1)$$

Teorema área-momento. Aplicando el teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{C/A} &= \left(\frac{2}{3}(12 \text{ pies}) \right) \left[\frac{1}{2}(12 \text{ pies}) \left(\frac{60 \text{ kip} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3}(12 \text{ pies}) + 12 \text{ pies} \right] \left[\frac{1}{2}(12 \text{ pies}) \left(-\frac{60 \text{ kip} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] \\ &= \frac{8640 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} \end{aligned}$$

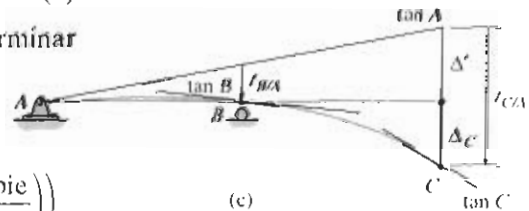
$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{3}(12 \text{ pies}) \right) \left[\frac{1}{2}(12 \text{ pies}) \left(\frac{60 \text{ kip} \cdot \text{pie}}{EI} \right) \right] = -\frac{1440 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

¿Por qué son negativos esos términos? Sustituyendo los resultados en la ecuación 1, resulta:

$$\Delta_C = \frac{8640 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} - 2 \left(\frac{1440 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} \right) = \frac{5760 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

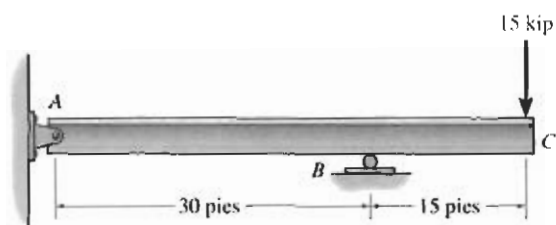
Tomando en cuenta que los cálculos se efectuaron en unidades de kip y pie, tenemos:

$$\Delta_C = \frac{5760 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3 (1728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3)}{[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](125 \text{ pulg}^4)} = 2.75 \text{ pulg} \downarrow \quad \text{Resp.}$$



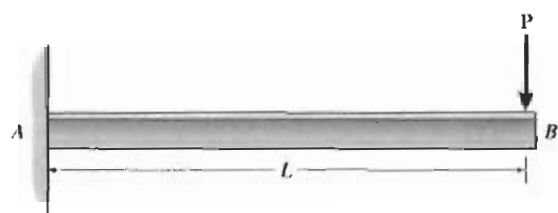
PROBLEMAS

12-54 Determine la pendiente y la deflexión en C . EI es constante.



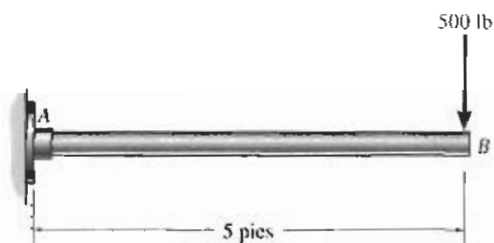
Problema 12-54

12-55 Determine la pendiente y la deflexión en B . EI es constante.



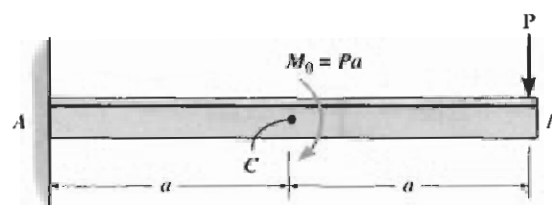
Problema 12-55

***12-56** Determine la pendiente y la deflexión en B si la viga de acero A-36 es (a) una barra sólida con diámetro de 3 pulg, (b) un tubo con diámetro exterior de 3 pulg y espesor de 0.25 pulg.



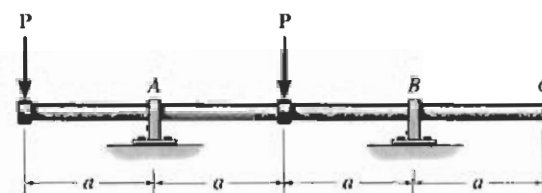
Problema 12-56

12-57 Determine la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante.



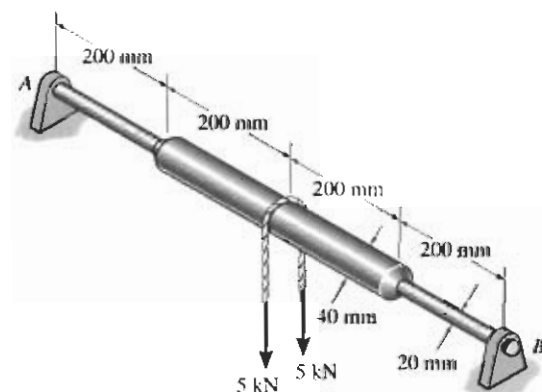
Problemas 12-57/12-58

12-58 Determine la pendiente en C y la deflexión en B . EI es constante.



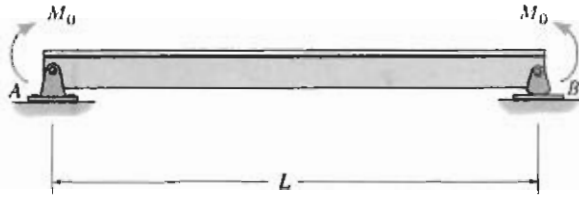
Problema 12-59

***12-60** La flecha de acero compuesta simplemente apoyada está sometida a una fuerza de 10 kN en su centro. Determine su deflexión máxima. $E_{ac} = 200$ GPa.



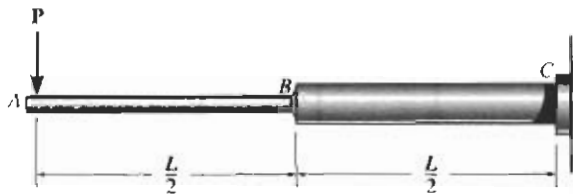
Problema 12-60

12-61 Determine la pendiente máxima y la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



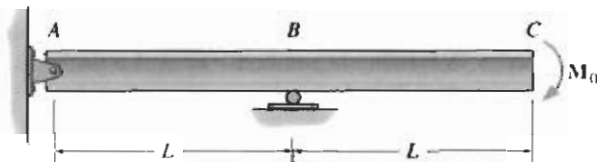
Problema 12-61

12-62 La barra está hecha de 2 flechas con momentos de inercia I en la región AB y de $2I$ en la región BC . Determine la pendiente máxima y la deflexión de la barra debido a la carga. El módulo de elasticidad es E .



Problema 12-62

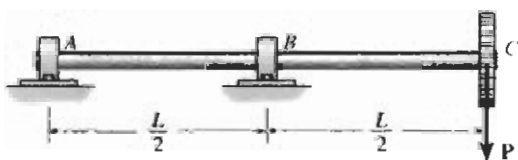
12-63 Determine la deflexión y la pendiente en C . EI es constante.



Problema 12-63

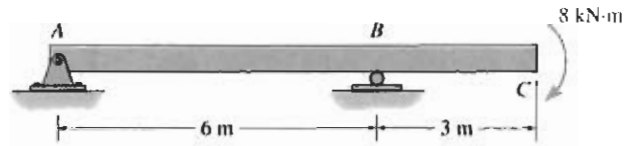
***12-64** La flecha soporta una polea en su extremo C . Determine la deflexión en C y las pendientes en los cojinetes A y B . EI es constante.

12-65 La flecha soporta una polea en su extremo C . Determine su deflexión máxima en la región AB . EI es constante. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



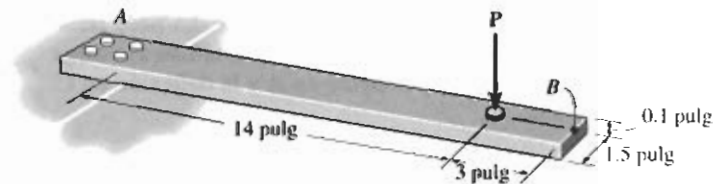
Problemas 12-64/12-65

12-66 Determine la deflexión en C y la pendiente de la viga en A , B y C . EI es constante.



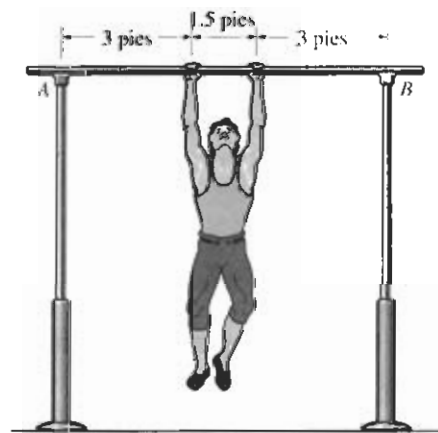
Problema 12-66

12-67 El resorte plano está hecho de acero A-36 y tiene una sección transversal rectangular como se muestra. Determine la carga P elástica máxima que puede aplicársele. ¿Cuál es la deflexión en B cuando P alcanza su valor máximo? Suponga que el resorte está empotrado en A .



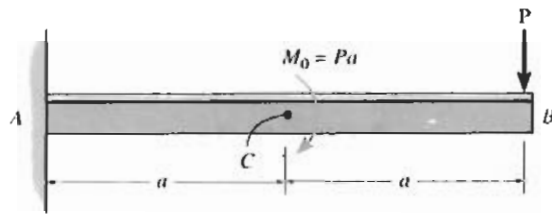
Problema 12-67

***12-68** El acróbata pesa 150 lb y está colgado simétricamente respecto al centro de la barra. Determine el esfuerzo máximo de flexión en la barra (tubo) así como su deflexión máxima. El tubo es de acero L2 y tiene un diámetro exterior de 1 pulg y un espesor de pared de 0.125 pulg.



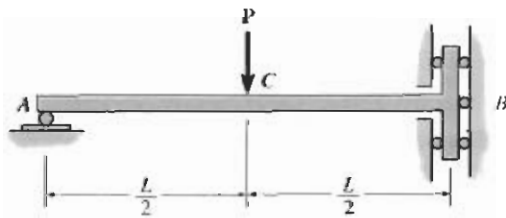
Problema 12-68

12-69 Determine la pendiente en C y la deflexión en B . EI es constante.



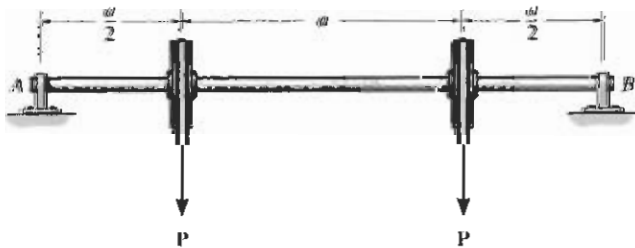
Problema 12-69

12-70 La barra está soportada por un empotramiento guiado en B que permite desplazamientos verticales pero resiste carga axial y momento. Si la barra está sometida a la carga mostrada, determine la pendiente en A y la deflexión en C . EI es constante.



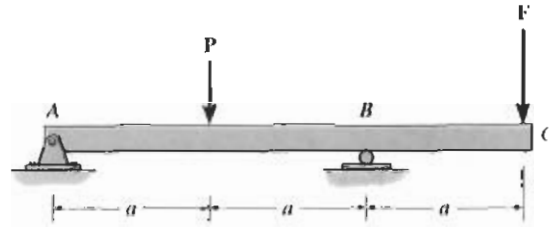
Problema 12-70

12-71 Determine la deflexión máxima de la flecha. EI es constante. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



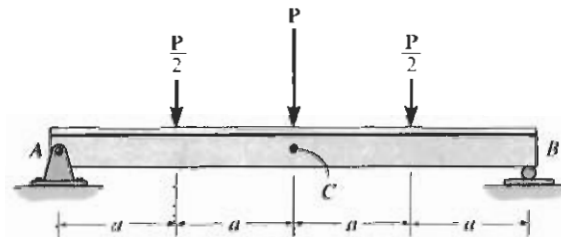
Problema 12-71

***12-72** La viga está sometida a la carga P como se muestra. Determine la magnitud de la fuerza F que debe aplicarse en el extremo C del voladizo para que la deflexión en C sea cero. EI es constante.



Problema 12-72

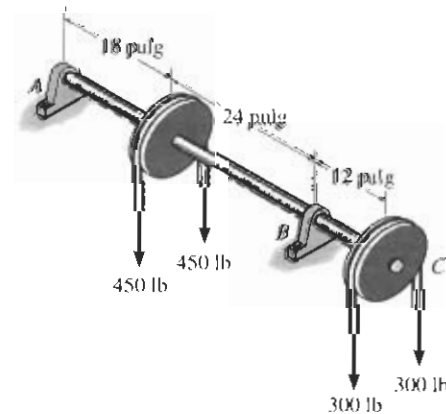
12-73 Determine la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante.



Problema 12-73

12-74 La flecha de acero A-36 está sometida a las cargas desarrolladas en las bandas que pasan sobre las dos poleas. Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha, determine la pendiente en A . La flecha tiene un diámetro de 0.75 pulg.

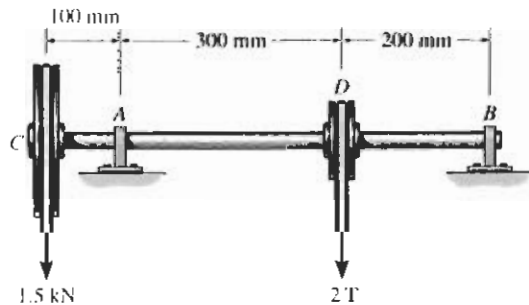
12-75 La flecha de acero A-36 está sometida a las cargas desarrolladas en las bandas que pasan sobre las dos poleas. Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha, determine la deflexión en C . La flecha tiene un diámetro de 0.75 pulg.



Problemas 12-74/12-75

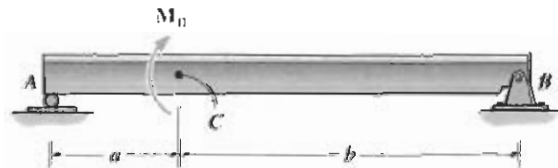
12-76 La flecha de acero A-36 de 25 mm de diámetro está soportada en A y B por cojinetes. Si la tensión en la banda sobre la polea en C es de 0.75 kN, determine la tensión T máxima en la banda sobre la polea en D de manera que la pendiente de la flecha en A o B no exceda de 0.02 rad. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.

12-77 La flecha de acero A-36 de 25 mm de diámetro está soportada en A y B por cojinetes. Si la tensión en la banda sobre la polea en C es de 0.75 kN, determine la tensión T máxima en la banda sobre la polea en D de manera que la pendiente de la flecha en A sea cero. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



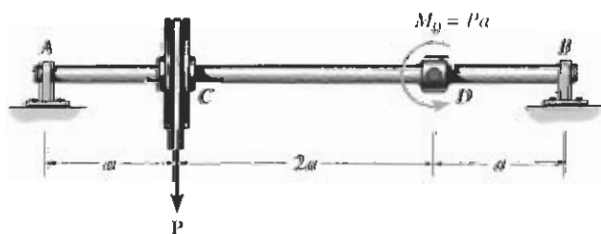
Problemas 12-76/12-77

12-78 La viga está sometida a la carga mostrada. Determine la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante.



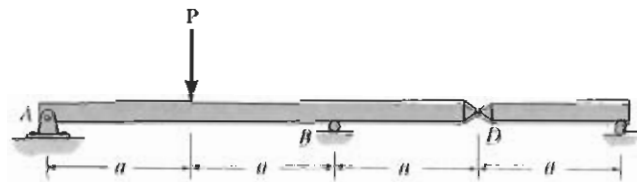
Problema 12-78

12-79 Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha, determine la pendiente en A y la deflexión máxima.



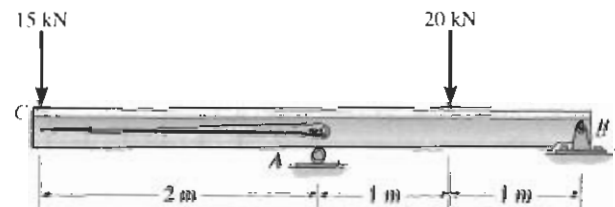
Problema 12-79

12-80 Las dos barras están conectadas por un pasador en D . Determine la pendiente en A y la deflexión en D . EI es constante.



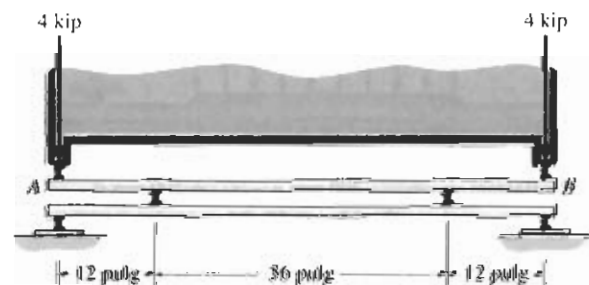
Problema 12-80

12-81 Una viga con EI constante está soportada como se muestra. Unido a la viga en A se encuentra un apuntador, libre de carga. Tanto la viga como el apuntador están en posición horizontal cuando la viga no está cargada. Determine la distancia entre el extremo de la viga y el apuntador después de que cada uno se ha desplazado por las cargas mostradas.



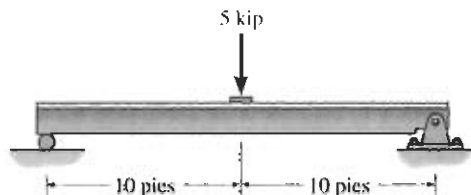
Problema 12-81

12-82 Las dos barras de acero A-36 tienen un espesor de 1 pulg, un ancho de 4 pulg y están diseñadas para funcionar como un resorte para la máquina que ejerce una fuerza de 4 kip sobre ellas en A y B . Si los soportes ejercen sólo fuerzas verticales sobre las barras, determine la deflexión máxima de la barra inferior.



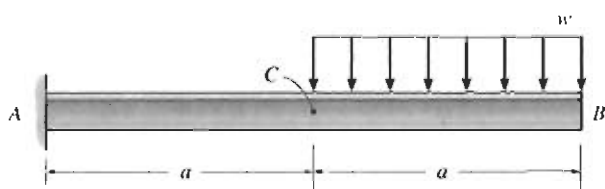
Problema 12-82

12-83 Las vigas hechas de plástico reforzado con fibras pueden algún día llegar a reemplazar a muchas de las vigas de acero A-36, ya que son resistentes a la corrosión y pesan la cuarta parte de las fabricadas de acero. Usando la tabla en el apéndice B, $\sigma_{\text{perm}} = 22 \text{ ksi}$ y $\tau_{\text{perm}} = 12 \text{ ksi}$, seleccione la viga de acero de patín ancho de menor peso que soporte con seguridad la carga de 5 kip y luego calcule su deflexión máxima. ¿Cuál sería la deflexión máxima de esta viga si estuviese hecha con plástico reforzado con fibras con $E_p = 18(10^3) \text{ ksi}$ y tuviese el mismo momento de inercia que la viga de acero?



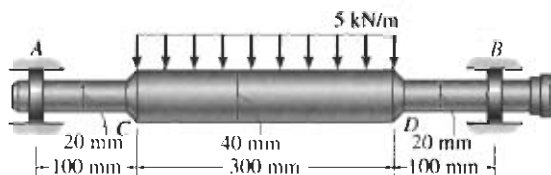
Problema 12-83

***12-84** Determine la pendiente en C y la deflexión en B . EI es constante.



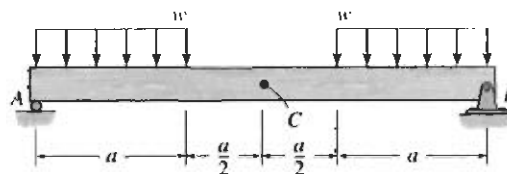
Problema 12-84

12-85 La flecha de acero A-36 se usa para soportar un rotor que ejerce una carga uniforme de 5 kN/m en la región CD de la flecha. Determine la pendiente de la flecha en los cojinetes A y B . Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



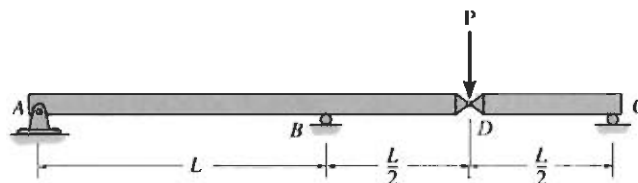
Problema 12-85

12-86 La viga está sometida a la carga mostrada. Determine la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante.



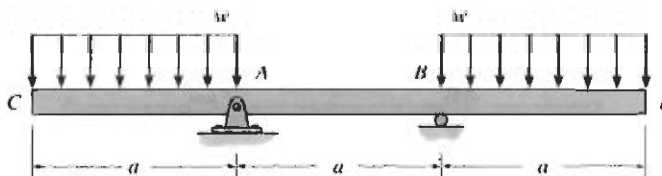
Problema 12-86

12-87 Las dos barras están conectadas por un pasador en D . Determine la pendiente en A y la deflexión en D . EI es constante.



Problema 12-87

***12-88** Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



Problema 12-88

EJEMPLO 12-13

Determine el desplazamiento en el punto C y la pendiente en el soporte A de la viga mostrada en la figura 12-29a. EI es constante.

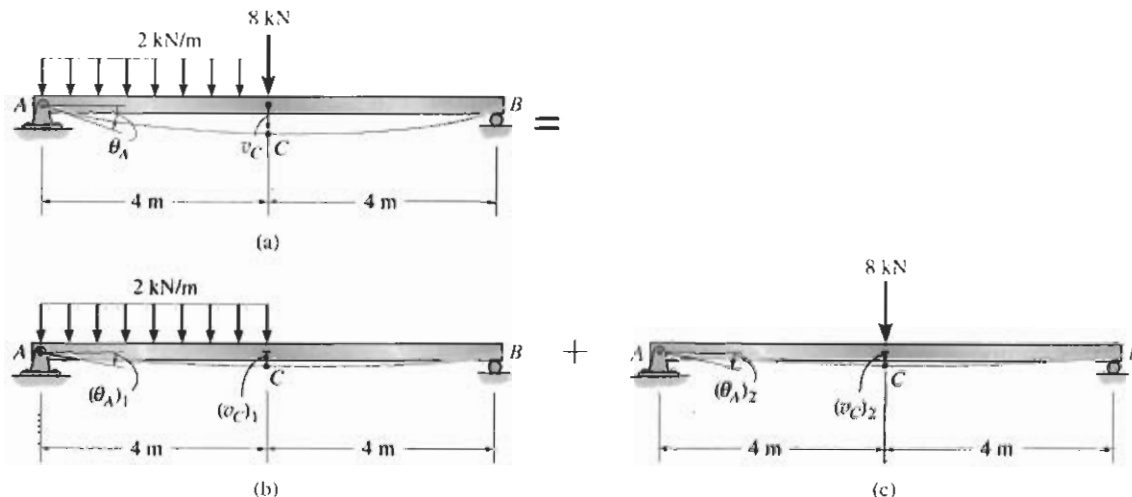


Figura 12-29

SOLUCIÓN

La carga puede separarse en dos partes componentes como se muestra en las figuras 12-29b y 12-29c. El desplazamiento en C y la pendiente en A se encuentran usando la tabla en el apéndice C para cada parte.

Para la carga distribuida,

$$(\theta_A)_1 = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2 \text{ kN/m})(8 \text{ m})^3}{128EI} = \frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow$$

$$(v_C)_1 = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(2 \text{ kN/m})(8 \text{ m})^4}{768EI} = \frac{53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Para la fuerza concentrada de 8 kN,

$$(\theta_A)_2 = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{8 \text{ kN}(8 \text{ m})^2}{16EI} = \frac{32 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow$$

$$(v_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{8 \text{ kN}(8 \text{ m})^3}{48EI} = \frac{85.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

El desplazamiento total en C y la pendiente en A son las sumas algebraicas de estas componentes. Tenemos entonces:

$$(+\downarrow) \quad \theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{56 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

$$(+\downarrow) \quad v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{139 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

EJEMPLO 12-14

Determine el desplazamiento en el extremo C de la viga con voladizo mostrada en la figura 12-30a. EI es constante.

SOLUCIÓN

Como la tabla en el apéndice *C no incluye* vigas con voladizos, esta viga se descompondrá en una simplemente apoyada más una porción en voladizo. Primero calculamos la pendiente en B causada por la carga distribuida actuando sobre el claro simplemente apoyado, figura 12-30b.

$$(\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{5 \text{ kN/m}(4 \text{ m})^3}{24EI} = \frac{13.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \uparrow$$

Como este ángulo es *pequeño*, $(\theta_B)_1 \approx \tan(\theta_B)_1$ y entonces el desplazamiento vertical en el punto C es

$$(v_C)_1 = (2 \text{ m}) \left(\frac{13.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) = \frac{26.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \uparrow$$

A continuación, la carga de 10 kN sobre el voladizo genera una fuerza estática equivalente de 10 kN y un momento concentrado de 20 kN · m en el soporte B del claro simplemente apoyado, figura 12-30c. La fuerza de 10 kN no genera ningún desplazamiento o pendiente en B ; sin embargo, el momento concentrado de 20 kN · m sí genera una pendiente. La pendiente en B debido a este momento es:

$$(\theta_B)_2 = \frac{M_0 L}{3EI} = \frac{20 \text{ kN} \cdot \text{m}(4 \text{ m})}{3EI} = \frac{26.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \downarrow$$

El punto C se desplaza entonces:

$$(v_C)_2 = (2 \text{ m}) \left(\frac{26.7 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \right) = \frac{53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Finalmente, la porción BC en voladizo es desplazada por la fuerza de 10 kN, figura 12-30d. Tenemos:

$$(v_C)_3 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{10 \text{ kN}(2 \text{ m})^3}{3EI} = \frac{26.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Sumando estos resultados algebraicamente, obtenemos el desplazamiento final del punto C ,

$$(+\downarrow) \quad v_C = -\frac{26.7}{EI} + \frac{53.3}{EI} + \frac{26.7}{EI} = \frac{53.3 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

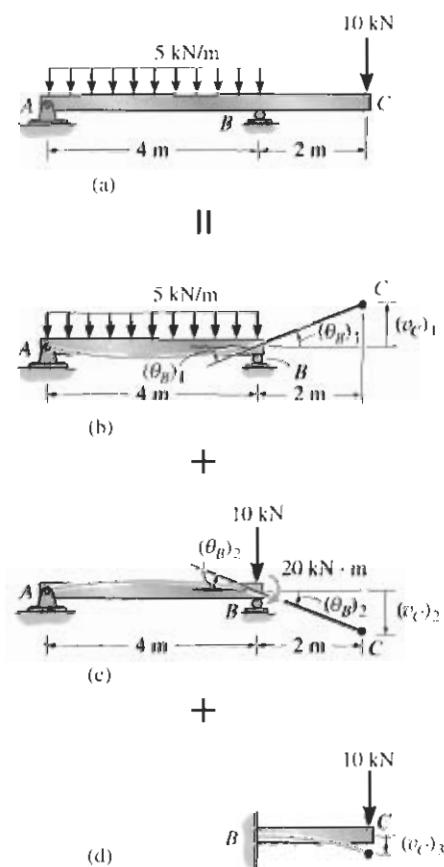


Figura 12-30

EJEMPLO 12-15

Determine el desplazamiento en el extremo C de la viga en voladizo mostrada en la figura 12-31. EI es constante.

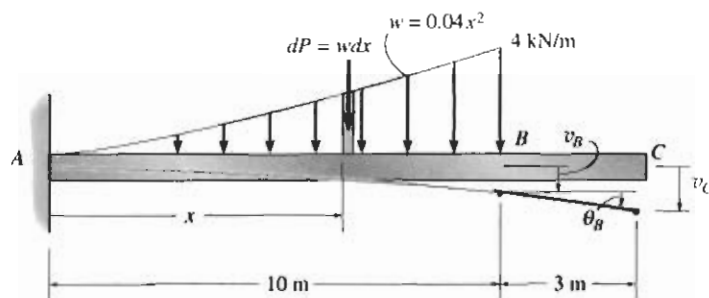


Figura 12-31

SOLUCIÓN

Cargas distribuidas que son parabólicas no se incluyen en la tabla del apéndice C. Para resolver este problema podemos considerar la carga como una serie infinita de fuerzas concentradas dP y luego integrar este resultado sobre la región en que actúan las cargas. Específicamente, la fuerza diferencial $dP = w dx = 0.04x^2 dx$ actúa a una distancia x de A . Usando la tabla para una sola fuerza concentrada dP , la pendiente y el desplazamiento en el punto B son entonces

$$\theta_B = \int \frac{dPx^2}{2EI} = \int_0^{10} \frac{(0.04x^2)x^2}{2EI} dx = \frac{400 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

$$v_B = \int \frac{dPx^2}{6EI} (3L - x) = \int_0^{10} \frac{(0.04x^2)x^2(3(10) - x)}{6EI} dx = \frac{2888.9 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

La región BC sin carga de la viga permanece recta, como se muestra en la figura 12-31. Como θ_B es pequeña, el desplazamiento en C es:

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad v_C &= v_B + \theta_B (3 \text{ m}) \\ &= \frac{2888.9 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} + \frac{400 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} (3 \text{ m}) \\ &= \frac{4089 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \end{aligned}$$

Resp.

EJEMPLO 12-16

La barra de acero mostrada en la figura 12-32a está soportada por dos resortes en sus extremos A y B . Cada resorte tiene una rigidez $k = 15 \text{ kip/pie}$ y no está inicialmente estirado. Si la barra se carga con una fuerza de 3 kip en el punto C , determine el desplazamiento vertical de la fuerza. Desprecie el peso de la barra y considere $E_{ac} = 29(10^3) \text{ ksi}$, $I = 12 \text{ pulg}^4$.

SOLUCIÓN

Las reacciones en los extremos A y B se calculan y se muestran en la figura 12-32b. Cada resorte se deflexiona una cantidad

$$(v_A)_1 = \frac{2 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pie}} = 0.1333 \text{ pies}$$

$$(v_B)_1 = \frac{1 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pie}} = 0.0667 \text{ pies}$$

Si la barra se considera *rígida*, esos desplazamientos ocasionan que se mueva hacia la posición mostrada en la figura 12-32b. Para este caso, el desplazamiento vertical en C es:

$$\begin{aligned} (v_C)_1 &= (v_B)_1 + \frac{6 \text{ pies}}{9 \text{ pies}} [(v_A)_1 - (v_B)_1] \\ &= 0.0667 \text{ pies} + \frac{2}{3} [0.1333 \text{ pies} - 0.0667 \text{ pies}] = 0.1111 \text{ pies} \downarrow \end{aligned}$$

Podemos encontrar el desplazamiento en C causado por la deformación de la barra, figura 12-32c, usando la tabla en el apéndice C. Tenemos:

$$\begin{aligned} (v_C)_2 &= \frac{Pab}{6EI} (L^2 - b^2 - a^2) \\ &= \frac{3 \text{ kip}(6 \text{ pies})(3 \text{ pies})[(9 \text{ pies})^2 - (6 \text{ pies})^2 - (3 \text{ pies})^2]}{6(9 \text{ pies}) [29(10^3) \text{ kip/pulg}^2] (144 \text{ pulg}^2/1 \text{ pie}^2) 12 \text{ pulg}^4 (1 \text{ pie}^4/20\,736 \text{ pulg}^4)} \\ &= 0.0149 \text{ pies} \downarrow \end{aligned}$$

Sumando las dos componentes de desplazamiento, obtenemos:

$$(\downarrow) v_C = 0.1111 \text{ pies} + 0.0149 \text{ pies} = 0.126 \text{ pies} = 1.51 \text{ pulg.} \downarrow \text{Resp.}$$

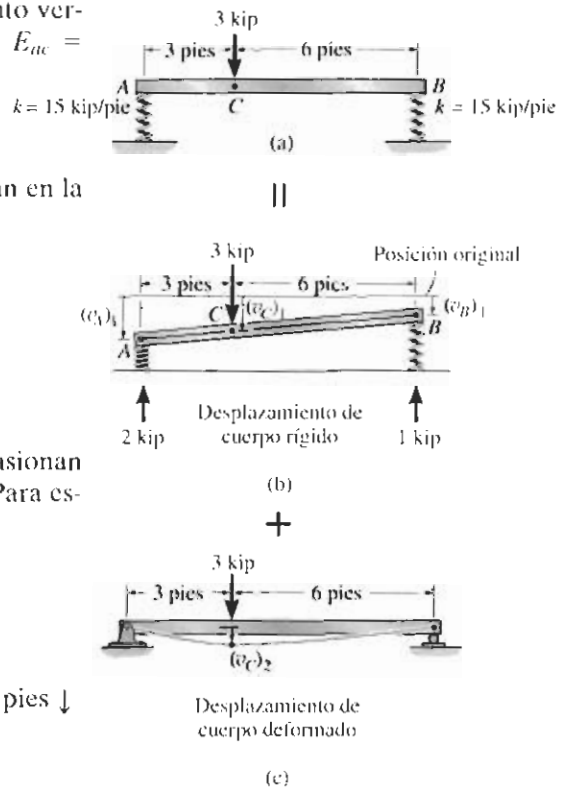
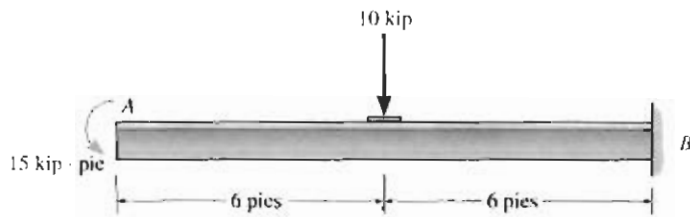


Figura 12-32

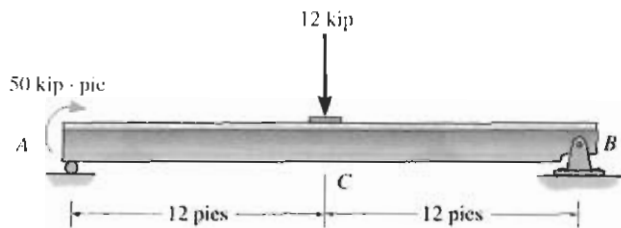
PROBLEMAS

12-89 La viga en voladizo $W8 \times 48$ está hecha de acero A-36 y está sometida a la carga mostrada. Determine la deflexión en su extremo A .



Problema 12-89

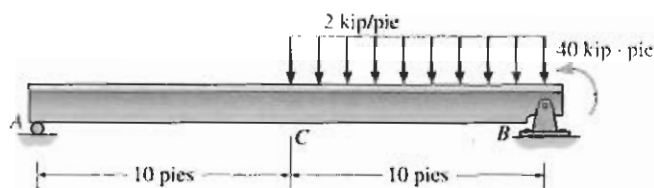
12-90 La viga simplemente apoyada $W12 \times 45$ está hecha de acero A-36 y está sometida a la carga mostrada. Determine la deflexión en su centro C .



Problema 12-90

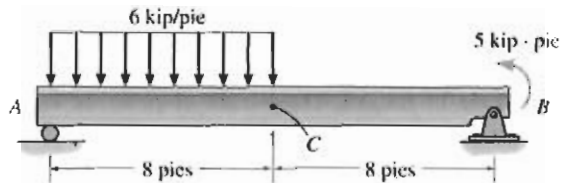
12-91 La viga simplemente apoyada $W14 \times 43$ está hecha de acero A-36 y está sometida a la carga mostrada. Determine la deflexión en su centro C .

***12-92** La viga simplemente apoyada $W14 \times 43$ está hecha de acero A-36 y está sometida a la carga mostrada. Determine la pendiente en A y en B .



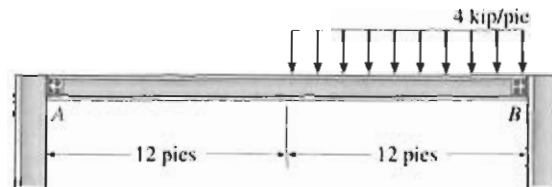
Problemas 12-91/12-92

12-93 La viga simplemente apoyada $W8 \times 24$ está hecha de acero A-36 y está sometida a la carga mostrada. Determine la deflexión en su centro C .



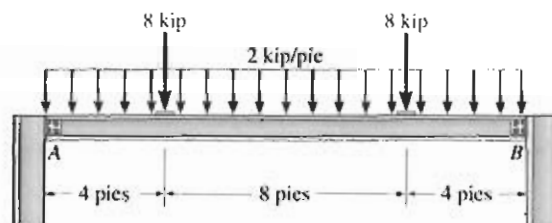
Problema 12-93

12-94 La viga soporta la carga mostrada. Las restricciones de un código, requieren que la deflexión máxima no exceda de $1/360$ de la longitud del claro, debido a la presencia de un plafón de yeso. Seleccione el perfil de patín ancho de acero A-36 más ligero en el apéndice B que satisfaga este requisito y soporte con seguridad la carga. El esfuerzo permisible por flexión es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 14$ ksi. Suponga que A es un rodillo y B un pasador.



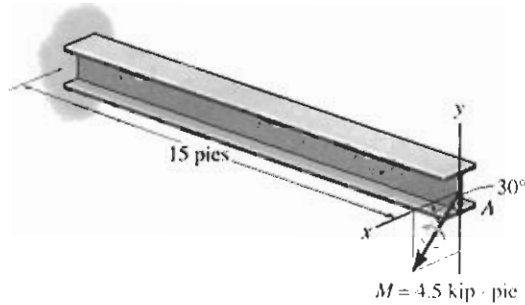
Problema 12-94

12-95 La viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme de 2 kip/pie. Debido a la presencia de un plafón de yeso, se requiere que la deflexión máxima no sea superior a $1/360$ de la longitud del claro. Seleccione en el apéndice B la viga de patín ancho de acero A-36 más ligera que cumpla este requisito y soporte con seguridad la carga. El esfuerzo permisible por flexión es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 14$ ksi. Suponga que A es un pasador y B un rodillo.



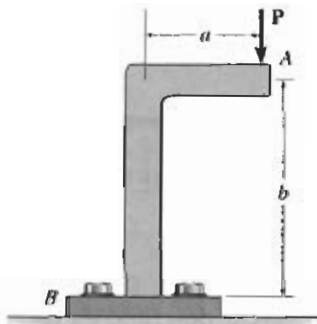
Problema 12-95

***12-96** La viga en voladizo $W10 \times 30$ está hecha de acero A-36 y está sometida a flexión asimétrica ocasionada por el momento aplicado. Determine la deflexión del centroide en su extremo A debido a la carga. *Sugerencia:* Resuelva el momento en componentes y use el principio de superposición.



Problema 12-96

12-97 Determine la deflexión vertical en el extremo A de la ménsula. Suponga que ésta está empotrada en su base B y desprecie la deflexión axial. EI es constante.



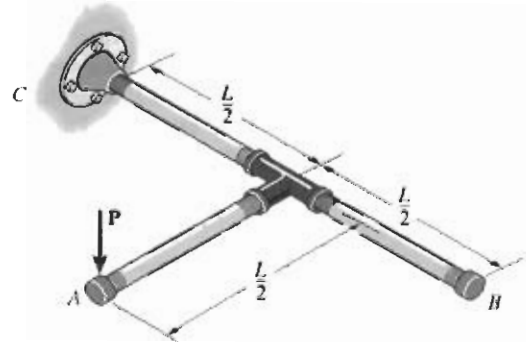
Problema 12-97

12-98 La barra está conectada por un pasador en A y unida a un resorte torsional de rigidez k , que mide el par por radián de rotación del resorte. Si la fuerza P se aplica siempre perpendicularmente al extremo de la barra, determine el desplazamiento de la fuerza. EI es constante.



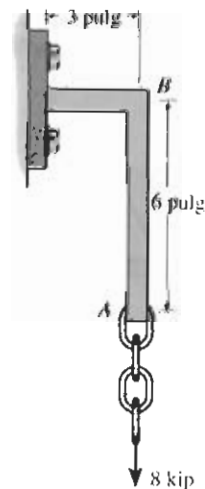
Problema 12-98

12-99 El conjunto de tubos consta de tres tubos de igual tamaño con rigidez por flexión EI y rigidez por torsión GJ . Determine la deflexión vertical en el punto A .



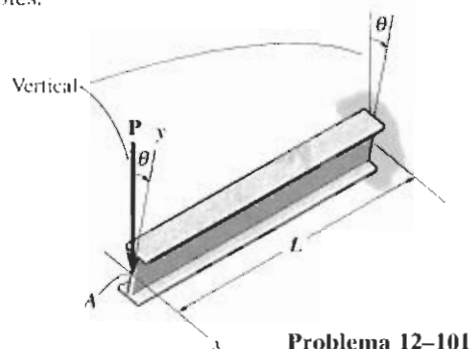
Problema 12-99

***12-100** Determine la deflexión vertical y la pendiente en el extremo A de la escuadra. Suponga que ésta está empotrada en su soporte y desprecie la deformación axial del segmento AB . EI es constante.



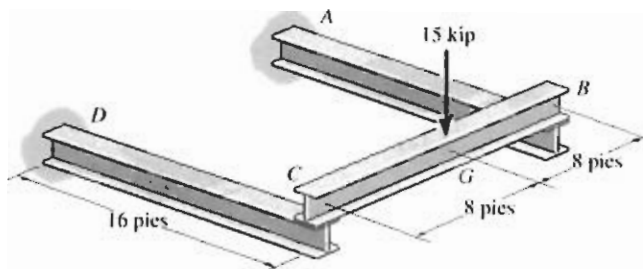
Problema 12-100

12-101 La viga de patín ancho actúa como viga en voladizo. Debido a un error, se instaló formando un ángulo θ con la vertical. Determine la razón de su deflexión en la dirección x respecto a su deflexión en la dirección y en A cuando se aplica una carga P en este punto. Los momentos de inercia son I_x e I_y . Para la solución, resuelva P en componentes y use el método de superposición. *Nota:* El resultado indica que pueden ocurrir grandes deflexiones laterales (dirección x) en vigas estrechas con $I_y \ll I_x$, cuando quedan impropriamente instaladas como en este caso. Para mostrar esto numéricamente, calcule las deflexiones en las direcciones x y y para una $W10 \times 15$, acero $P = 1.5$ kip, $\theta = 10^\circ$, y $L = 12$ pies.



Problema 12-101

12-102 La estructura consta de dos vigas CD y BA en voladizo, de acero A-36 y de una viga simplemente apoyada CB . Si cada viga es de acero y tiene un momento de inercia respecto a su eje principal $I_x = 118$ pulg⁴, determine la deflexión en el centro G de la viga CB .



Problema 12-102

12.6 VIGAS Y FLECHAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

El análisis de barras axialmente cargadas y de flechas torsionalmente cargadas estáticamente indeterminadas se describió en las secciones 4.4 y 4.5, respectivamente. En esta sección se ilustrará un método general para determinar las reacciones en vigas y flechas estáticamente indeterminadas. Específicamente, un miembro de cualquier tipo se clasifica como *estáticamente indeterminado* si el número de reacciones desconocidas *excede* el número disponible de ecuaciones de equilibrio.

Las reacciones adicionales en los soportes de una viga o flecha que *no se necesitan* para mantenerla en equilibrio estable se llaman *redundantes*. El número de estas redundantes se conoce como *grado de indeterminación*. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 12-33a. Si se traza el diagrama de cuerpo libre, figura 12-33b, se ve que hay cuatro reacciones desconocidas, y como para su solución se dispone de tres ecuaciones de equilibrio, la viga se clasifica como indeterminada de primer grado. A_y , B_y o M_A son las redundantes, ya que si cualquiera de estas reacciones se retira, la viga permanece estable y en equilibrio. (A_x no puede clasificarse como redundante, porque si se elimina, $\sum F_x = 0$ no se cumpliría.) Del mismo modo, la *viga continua* mostrada en la figura 12-34a es indeterminada de segundo grado, puesto que existen cinco reacciones desconocidas y sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles, figura 12-34b. En este caso las dos reacciones redundantes pueden escogerse de entre A_y , B_y , C_y y D_y .

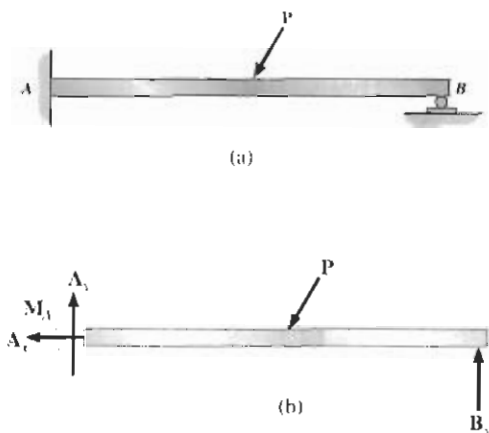


Figura 12-33

EJEMPLO 12-17

La viga está sometida a la carga distribuida mostrada en la figura 12-36a. Determine las reacciones en A. EI es constante.

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga se deflexiona como se muestra en la figura 12-36a. Se requiere sólo una coordenada x . Por conveniencia, la escogeremos con su origen en A, ya que así la expresión para el momento interno resulta más sencilla.

Función momento. La viga es indeterminada de primer grado, como lo evidencia el diagrama de cuerpo libre en la figura 12-36b. Podemos expresar el momento interno M en términos de la fuerza redundante en A usando el segmento mostrado en la figura 12-36c. En este caso,

$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 12-10, tenemos:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} A_y x^2 - \frac{1}{24} w_0 \frac{x^4}{L} + C_1$$

$$EI v = \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{120} w_0 \frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$

Las tres incógnitas A_y , C_1 y C_2 se determinan con las condiciones de frontera $x = 0$, $v = 0$; $x = L$, $dv/dx = 0$; y $x = L$, $v = 0$. Aplicando estas condiciones, obtenemos:

$$x = 0, v = 0; \quad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$x = L, \frac{dv}{dx} = 0; \quad 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1$$

$$x = L, v = 0; \quad 0 = \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

Despejando,

$$A_y = \frac{1}{10} w_0 L \quad \text{Resp.}$$

$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad C_2 = 0$$

Usando el resultado para A_y , las reacciones en B pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 12-36b. Demuestre que $B_x = 0$, $B_y = 0.4 w_0 L$, y $M_B = w_0 L^2/15$.

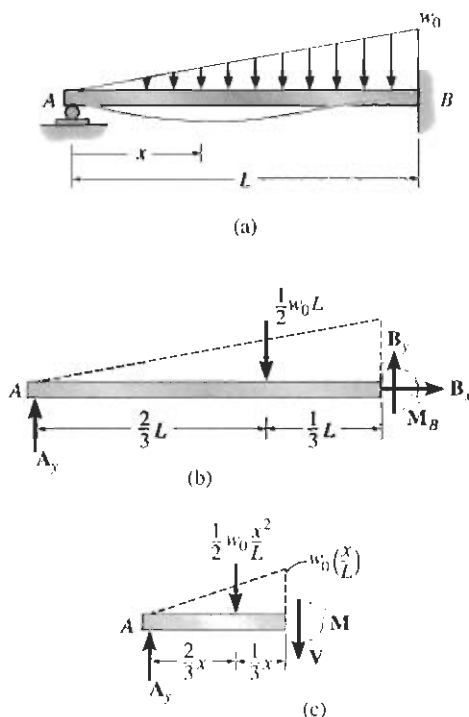


Figura 12-36

EJEMPLO 12-18

La viga en la figura 12-37a está empotrada en sus dos extremos y sometida a la carga uniforme mostrada. Determine las reacciones en los soportes. Desprecie el efecto de carga axial.

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga se deflexiona como se muestra en la figura 12-37a. Igual que en problema anterior, sólo es necesaria una coordenada x para la solución ya que la carga es continua a lo largo del claro.

Función momento. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, figura 12-37b, las fuerzas y momentos reactivos en A y B deben ser iguales debido a la simetría de la carga y de la geometría. La ecuación de equilibrio, $\Sigma F_y = 0$, requiere entonces que:

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} \quad \text{Resp.}$$

La viga es indeterminada de primer grado, donde M' es redundante. Usando el segmento de viga mostrado en la figura 12-37c, el momento interno M puede expresarse en términos de M' como sigue:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

Pendiente y curva elástica. Aplicando la ecuación 12-10, tenemos:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - M'x + C_1$$

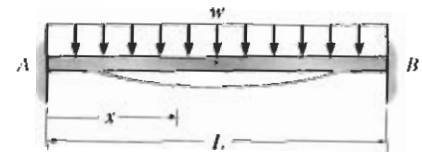
$$EIv = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{M'}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Las tres incógnitas, M' , C_1 y C_2 , pueden determinarse con las tres condiciones de frontera, $v = 0$ en $x = 0$, lo que da $C_2 = 0$; $dv/dx = 0$ en $x = 0$, lo que da $C_1 = 0$ y $v = 0$ en $x = L$, lo que da:

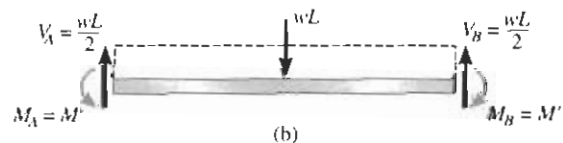
$$M' = \frac{wL^2}{12} \quad \text{Resp.}$$

Con estos resultados, note que debido a la simetría, la condición de frontera restante $dv/dx = 0$ en $x = L$ queda automáticamente satisfecha.

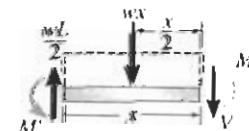
Debe ser claro que este método de solución es generalmente apropiado cuando se necesita sólo una coordenada para describir la curva elástica. Si se requieren varias coordenadas x , deben escribirse ecuaciones de continuidad, lo que complica el proceso de solución.



(a)



(b)

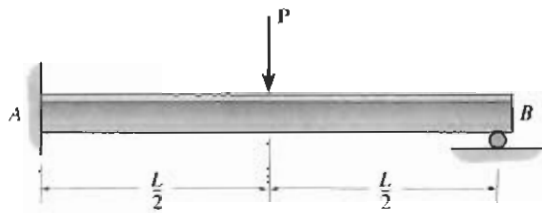


(c)

Figura 12-37

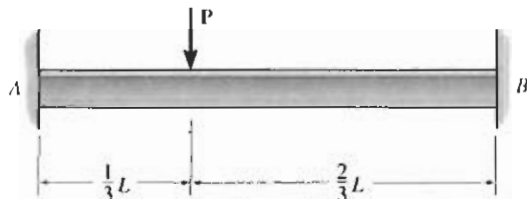
PROBLEMAS

12-103 Determine las reacciones en los soportes A y B y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Use funciones de discontinuidad. EI es constante.



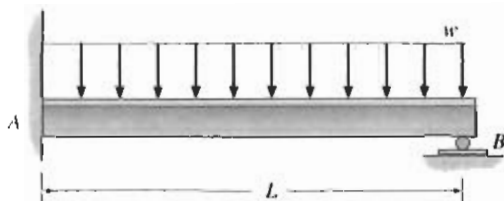
Problema 12-103

12-104 Determine las reacciones en los soportes A y B , y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante. Desprecie el efecto de carga axial.



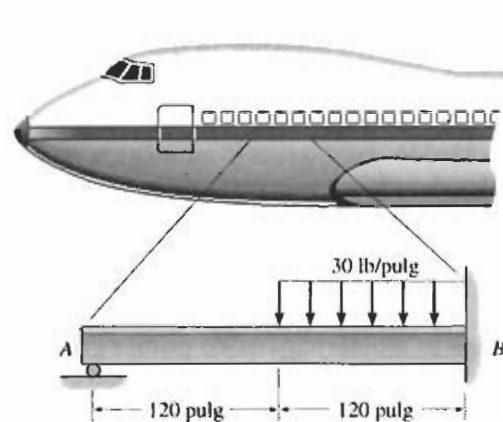
Problema 12-104

12-105 Determine las reacciones en los soportes A y B y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



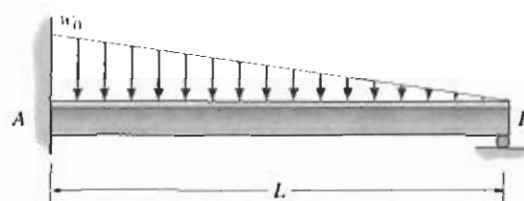
Problema 12-105

12-106 La carga sobre una viga de piso de un avión se muestra en la figura. Use funciones de discontinuidad y determine las reacciones en los soportes A y B y luego dibuje el diagrama de momento flexionante para la viga. La viga es de aluminio y tiene un momento de inercia $I = 320 \text{ pulg}^4$.



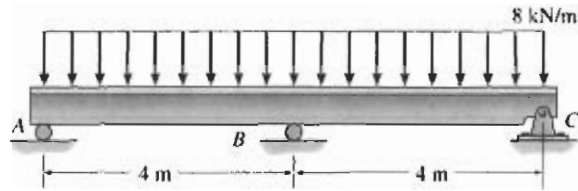
Problema 12-106

12-107 Determine los momentos de empotramiento en A y B . EI es constante.



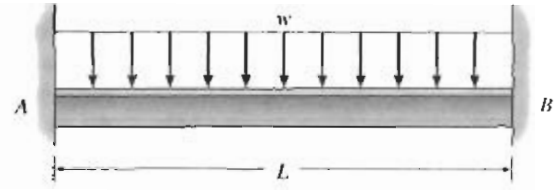
Problema 12-107

***12-108** Use funciones de discontinuidad y determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



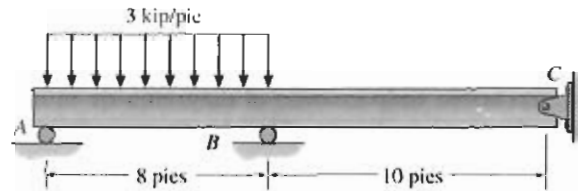
Problema 12-108

12-111 Determine los momentos de empotramiento en A y B y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



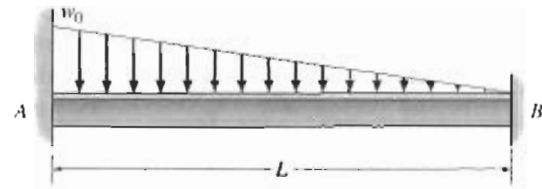
Problema 12-111

12-109 Use funciones de discontinuidad y determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



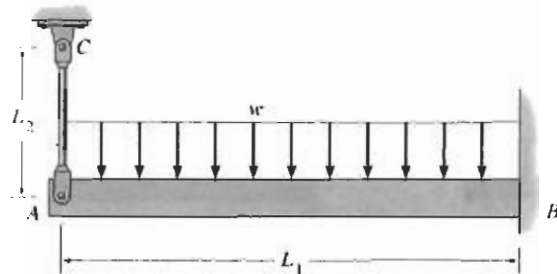
Problema 12-109

***12-112** Determine los momentos de empotramiento en A y B . EI es constante.



Problema 12-112

12-110 La viga tiene una $E_1 I_1$ constante y está soportada por una barra AC y el empotramiento en B . Si la barra tiene área transversal A_2 y su material tiene un módulo de elasticidad E_2 , determine la fuerza en la barra.



Problema 12-110

EJEMPLO 12-19

La viga está sometida a la carga concentrada mostrada en la figura 12-41a. Determine las reacciones en los soportes. EI es constante.

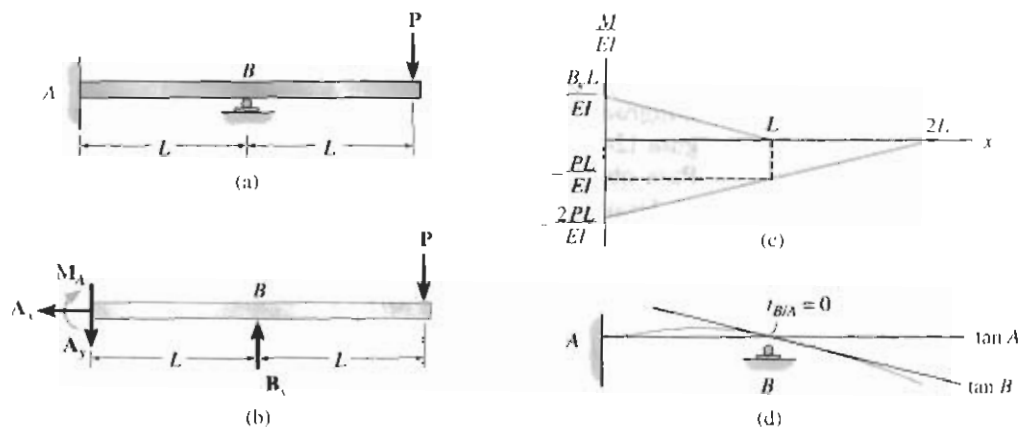


Figura 12-41

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 12-41b. Usando el método de superposición, se muestran por separado en la figura 12-41c los diagramas M/EI para la reacción redundante B_y y la carga P .

Curva elástica. La curva elástica de la viga se muestra en la figura 12-41d. Las tangentes en los soportes A y B se muestran también en esta figura. Como $\Delta_B = 0$, entonces:

$$t_{B/A} = 0$$

Teorema área-momento. Aplicando el teorema 2, tenemos:

$$t_{B/A} = \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{EI}\right)L\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{-PL}{EI}(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\right] = 0$$

$$B_y = 2.5P \quad \text{Resp.}$$

Ecuaciones de equilibrio. Usando este resultado, las reacciones en A en el diagrama de cuerpo libre, figura 12-41b, se determinan como sigue:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -A_y + 2.5P - P = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$A_y = 1.5P$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0; \quad -M_A + 2.5P(L) - P(2L) = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$M_A = 0.5PL$$

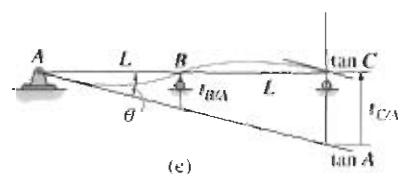
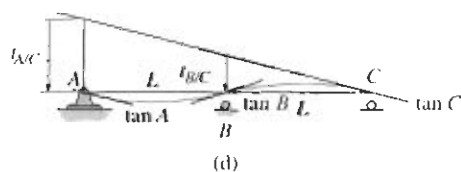
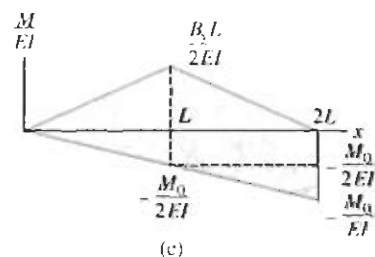
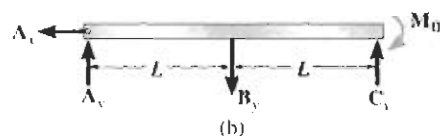
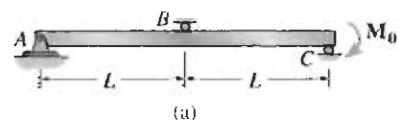


Figura 12-42

EJEMPLO 12-20

La viga está sometida a un momento concentrado en su extremo C como se muestra en la figura 12-42a. Determine la reacción en B . EI es constante.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI . El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 12-42b. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Para obtener una solución directa, escogemos B_y como la redundante. Usando la superposición, los diagramas M/EI para B_y y M_0 , cada uno aplicado a una viga simplemente apoyada, se muestran en la figura 12-42c. (Note que para cada una de tales vigas A_x , A_y y C_x no influyen en el diagrama M/EI .)

Curva elástica. La curva elástica para la viga se muestra en la figura 12-42d. Las tangentes en A , B y C se muestran en la misma figura. Como $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = 0$, las desviaciones tangenciales mostradas deben ser proporcionales; es decir,

$$t_{B/C} = \frac{1}{2} t_{A/C} \quad (1)$$

De la figura 12-42c, tenemos:

$$t_{B/C} = \left(\frac{1}{3} L \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{B_y L}{2EI} \right) (L) \right] + \left(\frac{2}{3} L \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-M_0}{2EI} \right) (L) \right] + \left(\frac{L}{2} \right) \left[\left(\frac{-M_0}{2EI} \right) (L) \right]$$

$$t_{A/C} = (L) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{B_y L}{2EI} \right) (2L) \right] + \left(\frac{2}{3} (2L) \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-M_0}{EI} \right) (2L) \right]$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y simplificado obtenemos:

$$B_y = \frac{3M_0}{2L} \quad \text{Resp.}$$

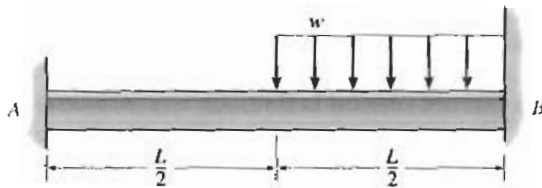
Ecuaciones de equilibrio. Las reacciones en A y C pueden ahora determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 12-42b. Demuestre que $A_x = 0$, $C_y = 5M_0/4L$, y $A_y = M_0/4L$.

Note en la figura 12-42e que este problema también puede resolverse en términos de las desviaciones tangenciales,

$$t_{B/A} = \frac{1}{2} t_{C/A}$$

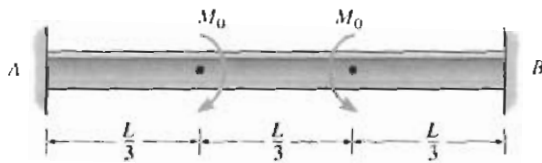
PROBLEMAS

12-113 Determine los momentos de empotramiento en A y B . EI es constante.



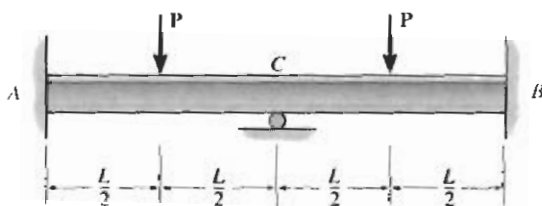
Problema 12-113

12-114 Determine los momentos de empotramiento en A y B y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



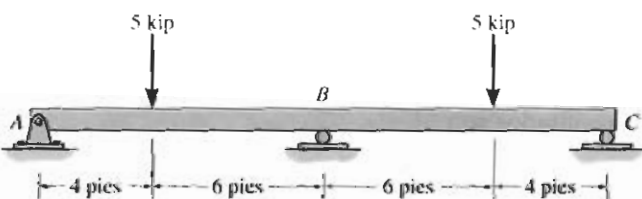
Problema 12-114

12-115 Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



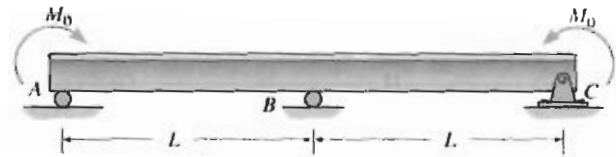
Problema 12-115

***12-116** Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



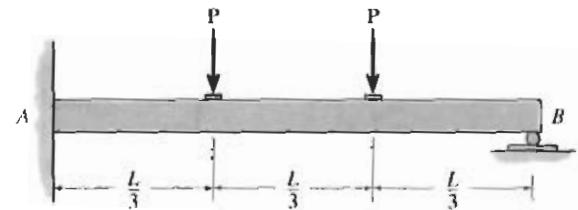
Problema 12-116

12-117 Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



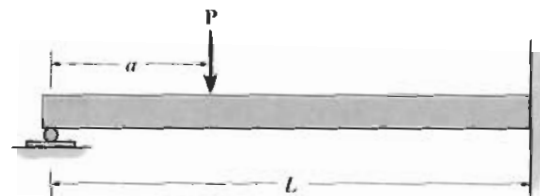
Problema 12-117

12-118 Determine las reacciones en los soportes A y B y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.



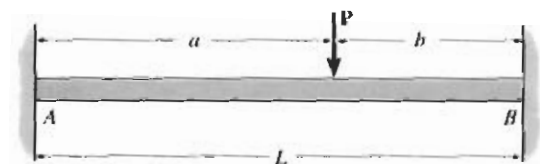
Problema 12-118

12-119 Determine el valor de a para el cual el momento máximo positivo tiene la misma magnitud que el momento máximo negativo. EI es constante.

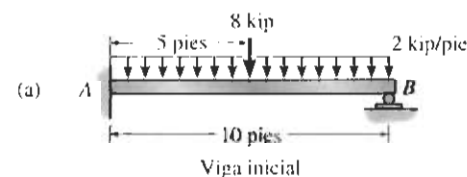


Problema 12-119

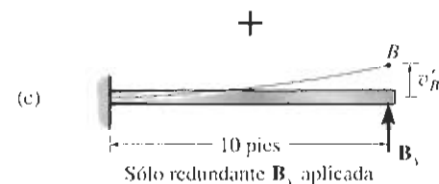
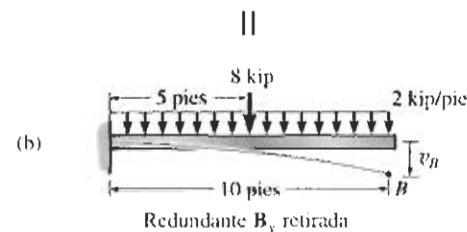
***12-120** Determine los momentos de empotramiento en A y B . EI es constante.



Problema 12-120

**EJEMPLO 12-21**

Determine las reacciones en el soporte de rodillo B de la viga mostrada en la figura 12-46a y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante.

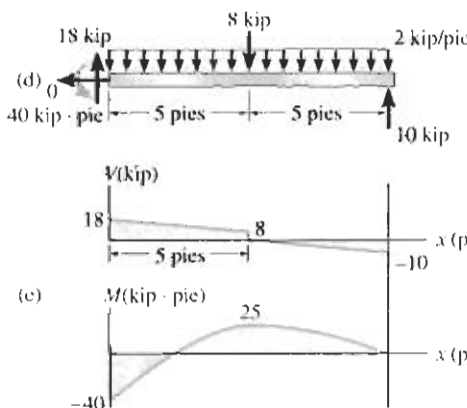
SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la viga es estáticamente determinada de primer grado. El soporte de rodillo en B se escogerá como redundante, por lo que B_y se determinará *directamente*. Las figuras 12-46b y 12-46c muestran la aplicación del principio de superposición. Aquí hemos supuesto que B_y actúa hacia arriba sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Considerando positivos los desplazamientos hacia abajo, la ecuación de compatibilidad en B es:

$$(+\downarrow) \quad 0 = v_B - v'_B \quad (1)$$

Estos desplazamientos pueden obtenerse directamente en la tabla del apéndice C.

**Figura 12-46**

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{2 \text{ kip/pie}(10 \text{ pies})^4}{8EI} + \frac{5(8 \text{ kip})(10 \text{ pies})^3}{48EI} = \frac{3333 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(10 \text{ pies})^3}{3EI} = \frac{333.3 \text{ pies}^3 B_y}{EI} \uparrow$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y resolviendo, se obtiene:

$$0 = \frac{3333}{EI} - \frac{333.3 B_y}{EI}$$

$$B_y = 10 \text{ kip}$$

Resp.

Ecuaciones de equilibrio. Usando este resultado y aplicando las tres ecuaciones de equilibrio, obtenemos los resultados mostrados en el diagrama de cuerpo libre de la viga en la figura 12-46d. Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en la figura 12-46e.

EJEMPLO 12-22

Determine las reacciones en la viga mostrada en la figura 12-47a. Debido a la carga y a una construcción deficiente, el soporte de rodillo en B se asienta 12 mm. Considere $E = 200 \text{ GPa}$ e $I = 80(10^6) \text{ mm}^4$.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Se escogerá como redundante el soporte de rodillo en B . El principio de superposición se muestra en las figuras 12-47b y 12-47c. Se supone aquí que B_y actúa hacia arriba sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Con referencia al punto B , usando unidades de metros, se debe tener:

$$(+\downarrow) \quad 0.012 \text{ m} = v_B - v'_B \quad (1)$$

Usando la tabla del apéndice C, los desplazamientos son:

$$v_B = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(24 \text{ kN/m})(8 \text{ m})^4}{768EI} = \frac{640 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{B_y(8 \text{ m})^3}{48EI} = \frac{10.67 \text{ m}^3 B_y}{EI} \uparrow$$

La ecuación 1 es entonces:

$$0.012EI = 640 - 10.67B_y$$

Expresando E e I en unidades de kN/m^2 y m^4 , respectivamente, tenemos:

$$0.012(200)(10^6)[80(10^{-6})] = 640 - 10.67B_y$$

$$B_y = 42.0 \text{ kN} \uparrow$$

Resp.

Ecuaciones de equilibrio. Aplicando este resultado a la viga, figura 12-47d, podemos calcular las reacciones en A y C usando las ecuaciones de equilibrio. Obtenemos:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad -96 \text{ kN}(2 \text{ m}) + 42.0 \text{ kN}(4 \text{ m}) + C_y(8 \text{ m}) = 0$$

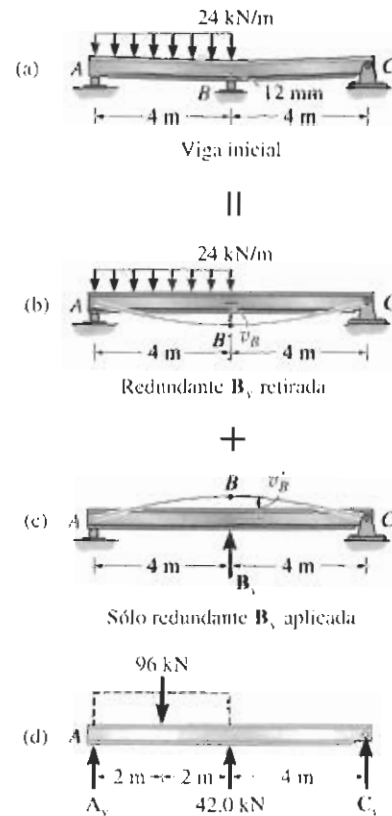
$$C_y = 3.00 \text{ kN} \uparrow$$

Resp.

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad A_y - 96 \text{ kN} + 42.0 \text{ kN} + 3.00 \text{ kN} = 0$$

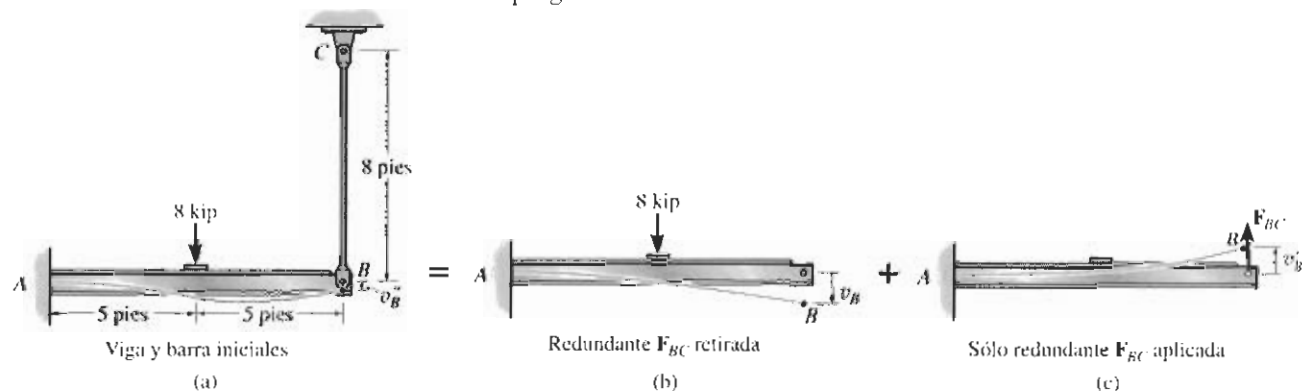
$$A_y = 51 \text{ kN} \uparrow$$

Resp.



EJEMPLO 12-23

La viga en la figura 12-48a está empotrada en A y conectada a una barra BC de $\frac{1}{2}$ pulg de diámetro. Si $E = 29(10^3)$ ksi para ambos miembros, determine la fuerza desarrollada en la barra debido a la carga. El momento de inercia de la viga respecto a su eje neutro es $I = 475$ pulg⁴.

**Figura 12-48****SOLUCIÓN I**

Principio de superposición. Por inspección, este problema es indeterminado de primer grado. En este caso B sufre un desplazamiento desconocido v_B'' , puesto que la barra se alargará. La barra será escogida como redundante, por lo que será desconectada de la viga en B , figura 12-48b, y luego será reaplicada, figura 12-48c.

Ecuación de compatibilidad. En el punto B se requiere:

$$(+\downarrow) \quad v_B'' = v_B - v'_B \quad (1)$$

Los desplazamientos v_B y v'_B se determinan con ayuda de la tabla en el apéndice C. v_B'' se calcula con la ecuación 4-2. En kilolibras y pulgadas, tenemos:

$$v_B'' = \frac{PL}{AE} = \frac{F_{BC}(8 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(\pi/4)(\frac{1}{2} \text{ pulg})^2[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} = 0.01686F_{BC} \downarrow$$

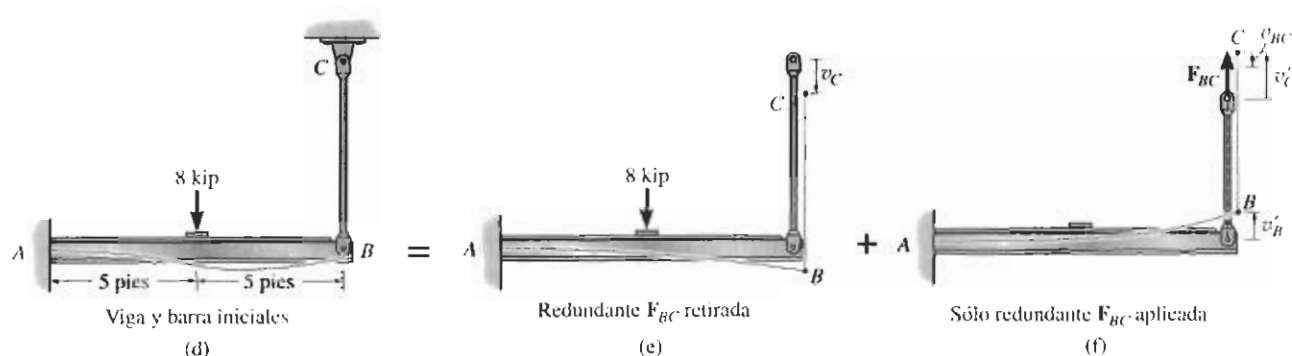
$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{5(8 \text{ kip})(10 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}{48[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](475 \text{ pulg}^4)} = 0.1045 \text{ pulg} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{BC}(10 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}{3[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](475 \text{ pulg}^4)} = 0.04181F_{BC} \uparrow$$

La ecuación 1 es entonces:

$$(+\downarrow) \quad 0.01686F_{BC} = 0.1045 - 0.04181F_{BC} \quad \text{Resp.}$$

$$F_{BC} = 1.78 \text{ kip}$$



SOLUCIÓN II

Principio de superposición. También podemos resolver este problema suprimiendo el soporte de pasador en C y manteniendo la barra unida a la viga. En este caso, la carga de 8 kip ocasionará que los puntos B y C se desplacen hacia abajo la *misma cantidad* v_C , figura 12-48e, ya que no existe fuerza en la barra BC. Cuando se aplica la fuerza redundante F_{BC} al punto C, ésta ocasiona que el extremo C de la barra se desplace hacia arriba v'_C y que el extremo B de la viga se desplace hacia arriba v'_B , figura 12-48f. La diferencia entre esos dos desplazamientos, v_{BC} , representa el alargamiento de la barra debido a F_{BC} , de manera que $v'_C = v_{BC} + v'_B$. Por tanto, de las figuras 12-48d, 12-48e y 12-48f, la expresión para la compatibilidad de los desplazamientos en el punto C es:

$$(+\downarrow) \quad 0 = v_C - (v_{BC} + v'_B) \quad (2)$$

De la solución I, tenemos:

$$v_C = v_B = 0.1045 \text{ pulg } \downarrow$$

$$v_{BC} = v''_B = 0.01686 F_{BC} \uparrow$$

$$v'_B = 0.04181 F_{BC} \uparrow$$

Por consiguiente, la ecuación 2 es entonces:

$$(+\downarrow) \quad 0 = 0.1045 - (0.01686 F_{BC} + 0.04181 F_{BC})$$

$$F_{BC} = 1.78 \text{ kip}$$

Resp.

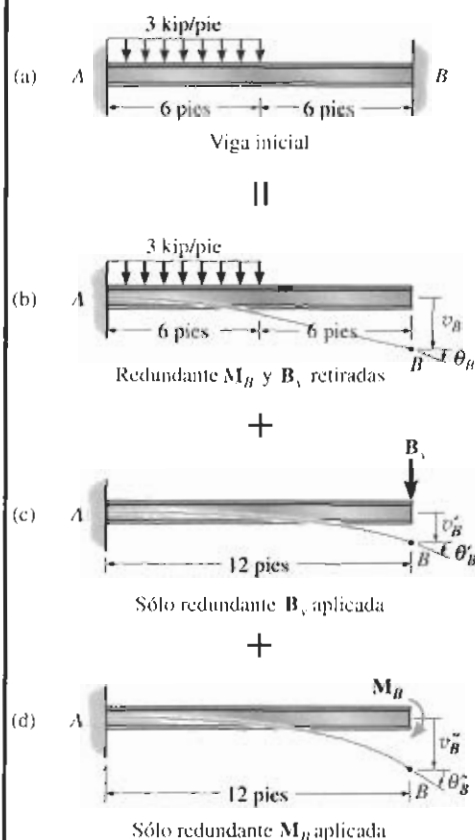


Figura 12-49

EJEMPLO 12-24

Determine el momento en B para la viga mostrada en la figura 12-49a. EI es constante. Desprecie el efecto de carga axial.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Como la carga axial sobre la viga se desprecia, se tendrá sólo una fuerza vertical y un momento en cada empotramiento A y B . Se tienen en este caso dos ecuaciones disponibles de equilibrio ($\Sigma M = 0$, $\Sigma F_y = 0$), por lo que el problema es indeterminado de segundo grado. Supondremos que B_y y M_B son las redundantes, de manera que por el principio de superposición la viga queda representada como una viga en voladizo cargada *separadamente* por la carga distribuida y por las reacciones B_y y M_B , figuras 12-49b, 12-49c y 12-49d.

Ecuaciones de compatibilidad. Con referencia al desplazamiento y pendiente en B , se requiere:

$$(\uparrow+) \quad 0 = \theta_B + \theta'_B + \theta''_B \quad (1)$$

$$(+\downarrow) \quad 0 = v_B + v'_B + v''_B \quad (2)$$

Usando la tabla en el apéndice C para calcular las pendientes y desplazamientos, tenemos:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} = \frac{3 \text{ kip/pie}(12 \text{ pies})^3}{48EI} = \frac{108}{EI} \downarrow$$

$$v_B = \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{7(3 \text{ kip/pie})(12 \text{ pies})^4}{384EI} = \frac{1134}{EI} \downarrow$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{B_y(12 \text{ pies})^2}{2EI} = \frac{72B_y}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(12 \text{ pies})^3}{3EI} = \frac{576B_y}{EI} \downarrow$$

$$\theta''_B = \frac{ML}{EI} = \frac{M_B(12 \text{ pies})}{EI} = \frac{12M_B}{EI} \downarrow$$

$$v''_B = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{M_B(12 \text{ pies})^2}{2EI} = \frac{72M_B}{EI} \downarrow$$

Sustituyendo esos valores en las ecuaciones 1 y 2 y suprimiendo el factor común EI , obtenemos:

$$(\uparrow+) \quad 0 = 108 + 72B_y + 12M_B$$

$$(+\downarrow) \quad 0 = 1134 + 576B_y + 72M_B$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones, resulta:

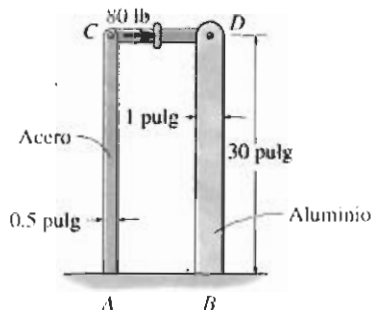
$$B_y = -3.375 \text{ kip}$$

$$M_B = 11.25 \text{ kip} \cdot \text{pie}$$

Resp.

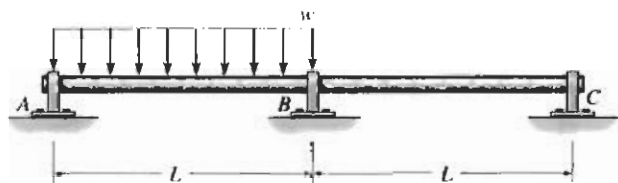
PROBLEMAS

12-121 El conjunto consiste en una barra de acero y una de aluminio, cada una con espesor de 1 pulg, empotradas en sus extremos A y B y conectadas por pasador al eslabón corto rígido CD . Si se aplica una fuerza horizontal de 80 lb al eslabón tal como se muestra, determine los momentos que se generan en A y B . $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_{al} = 10(10^3)$ ksi.



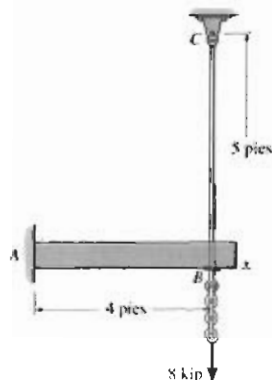
Problema 12-121

12-122 Determine las reacciones en los soportes y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. EI es constante. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha.



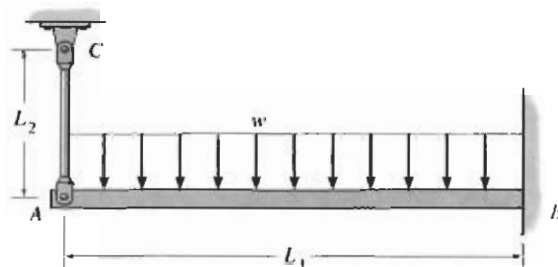
Problema 12-122

12-123 La viga y barra de acero A-36 se usan para soportar la carga de 8 kip. Si se requiere que el esfuerzo normal permisible para el acero sea $\sigma_{perm} = 18$ ksi y que la deflexión máxima no exceda de 0.05 pulg y determine el diámetro más pequeño para la barra que puede usarse. La viga es rectangular con peralte de 5 pulg y espesor de 3 pulg.



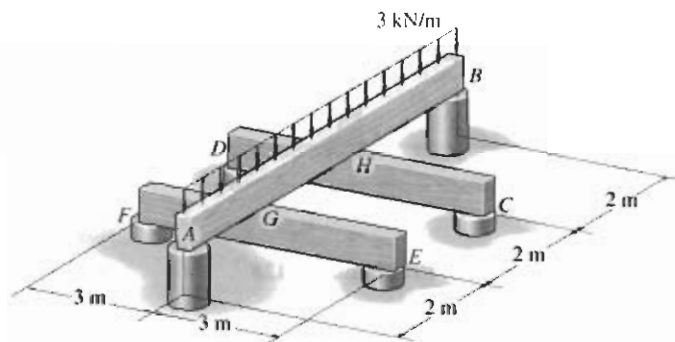
Problema 12-123

***12-124** La viga tiene una $E_1 I_1$ constante y está soportada por el empotramiento en B y la barra AC . Si la barra tiene un área transversal A_2 y su material tiene un módulo de elasticidad E_2 , determine la fuerza en ella.



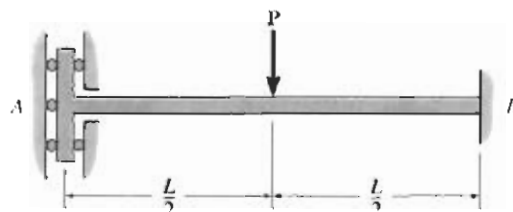
Problema 12-124

12-125 La estructura consta de tres vigas simplemente apoyadas; el fondo de la viga superior descansa sobre la parte superior de las dos vigas inferiores. Si se aplica una carga uniforme de 3 kN/m a la viga superior, determine las reacciones verticales en cada uno de los soportes. EI es constante.



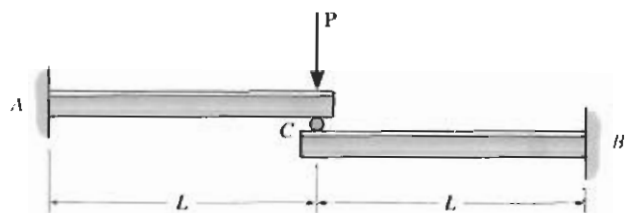
Problema 12-125

12-126 Determine las reacciones en A y B . Suponga que el soporte en A sólo ejerce un momento en la viga. EI es constante.



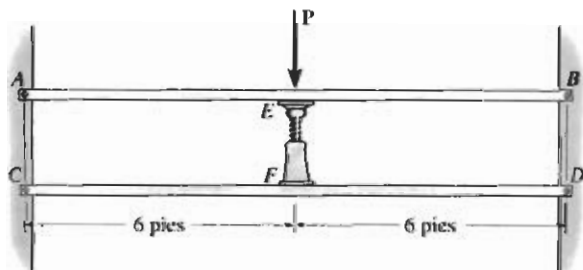
Problema 12-126

12-127 Los segmentos de la viga compuesta se juntan en el centro a través de un contacto liso (rodillo). Determine las reacciones en los empotramientos A y B cuando se aplica la carga P . EI es constante.



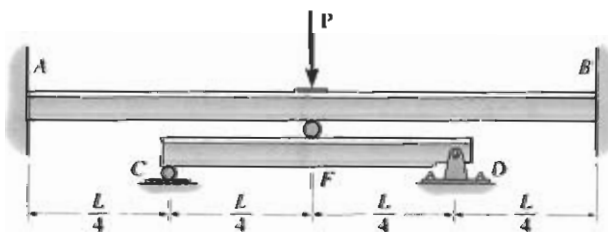
Problema 12-127

***12-128** Cada uno de los dos miembros está hecho de aluminio 6061-T6 y tiene sección transversal cuadrada de 1 pulg \times 1 pulg. Los miembros están conectados por pasadores en sus extremos y un gato se coloca entre ellos que aplica una fuerza sobre cada miembro de 500 lb. Determine la máxima fuerza P que puede aplicarse en el centro del miembro superior sin que se presente la fluencia en ninguno de los dos miembros. Desprecie en el análisis la fuerza axial en los miembros. Suponga que el gato es rígido.



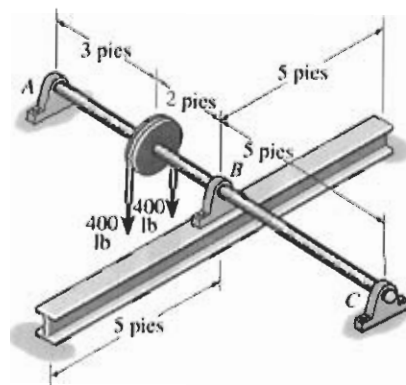
Problema 12-128

12-129 La viga AB doblemente empotrada es reforzada por medio de la viga CD simplemente apoyada que tiene un rodillo en F , el cual se coloca antes de la aplicación de la carga P . Determine las reacciones en los soportes considerando que EI es constante.



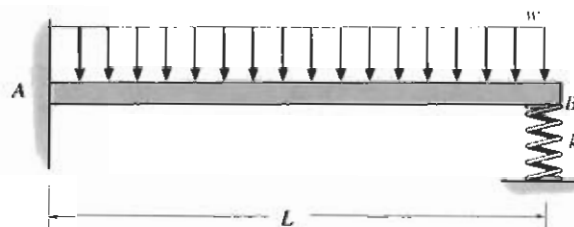
Problema 12-129

12-130 La flecha de acero A-36 con diámetro de 1 pulg está soportada por cojinetes fijos en A y C . El cojinete en B descansa sobre una viga simplemente apoyada, de patín ancho, de acero y tiene un momento de inercia $I = 500 \text{ pulg}^4$. Si las cargas en las bandas de la polea son cada una de 400 lb, determine las reacciones verticales en A , B y C .



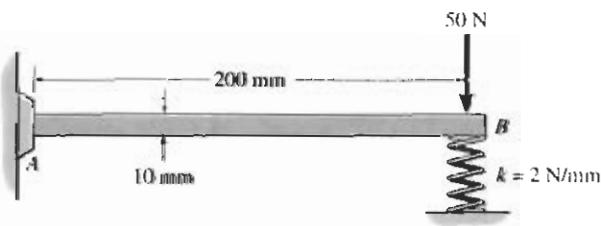
Problema 12-130

12-131 Determine la fuerza en el resorte. EI es constante.



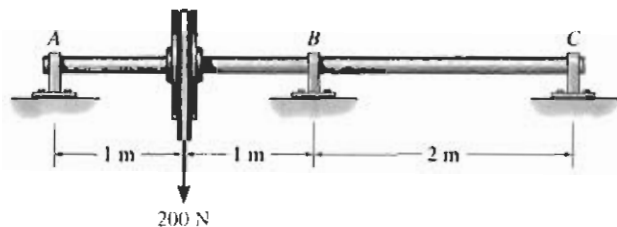
Problema 12-131

***12-132** Determine la deflexión en el extremo B de la barra empotrada de acero A-36. El resorte tiene una rigidez $k = 2 \text{ N/mm}$. La barra tiene 5 mm de ancho y 10 mm de altura. Además, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la barra.



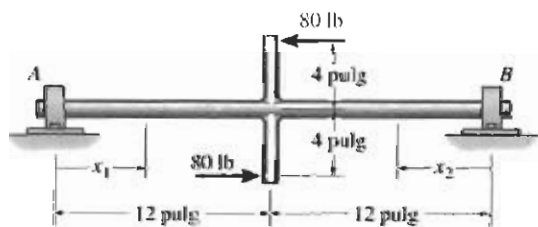
Problema 12-132

12-139 Los cojinetes A , B y C ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha. Determine esas reacciones y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. EI es constante. Use los teoremas de área-momento.



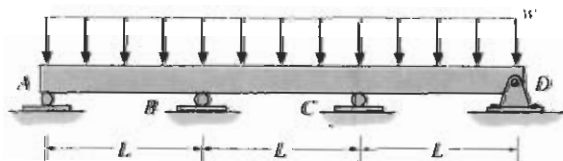
Problema 12-139

***12-140** La flecha está soportada en un cojinete en A que ejerce sólo reacciones verticales sobre la flecha y por un cojinete de empuje en B que ejerce reacciones tanto horizontales como verticales sobre la flecha. Dibuje el diagrama de momento flexionante para la flecha y luego, con ayuda de este diagrama, esboce la curva elástica de la línea central de la flecha. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2 . EI es constante.



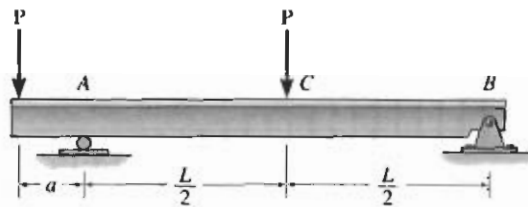
Problema 12-140

12-141 Determine las reacciones en los soportes. EI es constante. Use el método de superposición.



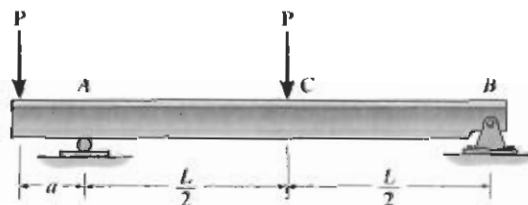
Problema 12-141

12-142 Determine el valor de a de manera que la pendiente en A sea igual a cero. EI es constante. Use los teoremas de área-momento.



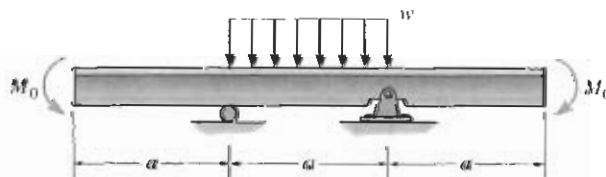
Problema 12-142

12-143 Determine el valor de a de manera que la deflexión en C sea igual a cero. EI es constante. Use los teoremas de área-momento.



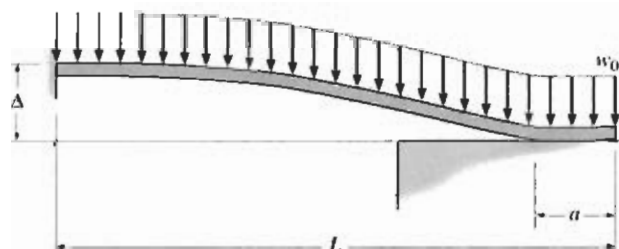
Problema 12-143

***12-144** Usando el método de superposición, determine la magnitud de M_0 en términos de la carga w distribuida y de la dimensión a de manera que la deflexión en el centro de la viga sea igual a cero. EI es constante.



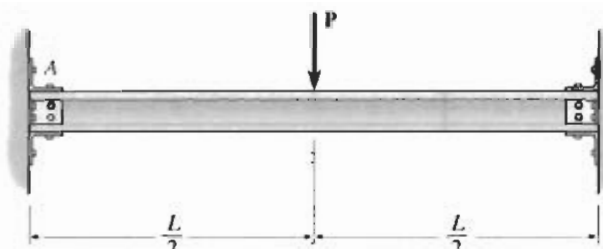
Problema 12-144

12-133 La viga está hecha de un material elástico suave con EI constante. Si está originalmente a una distancia Δ de la superficie de su soporte extremo, determine la distancia a sobre la que descansará en este soporte cuando esté sometida a la carga uniforme w_0 , que es suficientemente grande para ocasionar que esto ocurra.



Problema 12-133

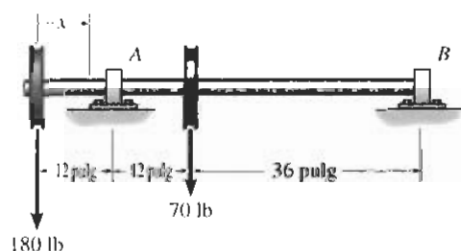
12-134 La viga está apoyada en los soportes atornillados en sus extremos. Al cargarla, esos soportes no proporcionan realmente un empotramiento sino que permiten una ligera rotación α antes de que puedan considerarse como empotramientos. Determine el momento en las conexiones y la deflexión máxima de la viga.



Problema 12-134

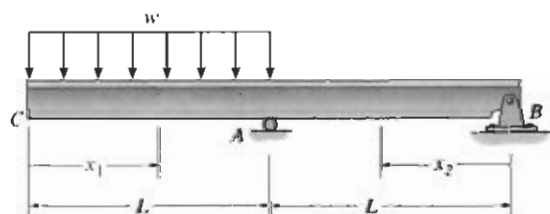
PROBLEMAS DE REPASO

12-135 La flecha soporta las cargas de las dos poleas mostradas. Usando funciones de discontinuidad, determine la ecuación de la curva elástica. Los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha. EI es constante.



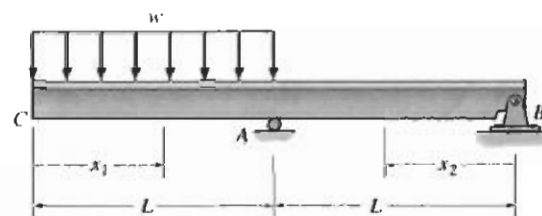
Problema 12-135

***12-136** Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2 . Especifique la pendiente en A y la deflexión máxima. EI es constante. Use el método de integración.



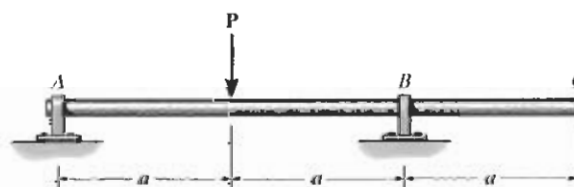
Problema 12-136

12-137 Determine la deflexión máxima entre los soportes A y B . EI es constante. Use el método de integración.



Problema 12-137

12-138 Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre la flecha, determine la pendiente en B y la deflexión en C . EI es constante. Use los teoremas de área-momento.



Problema 12-138

$$11-34. \sigma = \frac{3PL}{2bx^2}; \text{ el esfuerzo es constante en todo el claro.}$$

$$11-35. \sigma = \frac{3wL^2}{b_0h^2}; \text{ el esfuerzo es constante en todo el claro.}$$

$$11-37. b = \frac{b_0}{L^2}x^2$$

$$11-38. d = 1\frac{1}{8} \text{ pulg}$$

$$11-39. d = 1\frac{1}{8} \text{ pulg}$$

$$11-41. 34.3 \text{ mm}$$

$$11-42. d = 1\frac{1}{2} \text{ pulg}$$

$$11-43. d = 1\frac{1}{8} \text{ pulg}$$

$$11-45. d = 1\frac{1}{8} \text{ pulg}$$

$$11-46. 21 \text{ mm}$$

$$11-47. 19 \text{ mm}$$

$$11-49. 33 \text{ mm}$$

$$11-50. 2.71 \text{ pulg}$$

$$11-51. y = \left[\frac{4P}{\pi\sigma_{\text{perm}}}x \right]^{1/3}$$

$$11-53. b = 54.7 \text{ mm}$$

$$11-54. W10 \times 12$$

$$11-55. 44 \text{ mm}$$

$$11-57. W18 \times 50$$

Capítulo 12

$$12-1. 3.02 \text{ ksi}$$

$$12-2. 75.5 \text{ ksi}$$

$$12-3. \theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}, v = \frac{Px}{48EI}(4x^2 - 3L^2),$$

$$v_{\text{máx}} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

$$12-5. v_1 = \frac{P}{6EI}[-3(L-a)^2x_1 - 3a(L-a)^2 - 2(L-a)^3],$$

$$v_2 = \frac{P}{6EI}[2x_2^3 - 3(L-a)x_2^2]$$

$$12-6. v_{\text{máx}} = \frac{3PL^3}{256EI}$$

$$12-7. \theta_A = \frac{Pa(a-L)}{2EI}, v_1 = \frac{Px_1}{6EI}[x_1^2 + 3a(a-L)],$$

$$v_2 = \frac{Pa}{6EI}[3x(x-L) + a^2], v_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI}(4a^2 - 3L^2)$$

$$12-9. v_{\text{máx}} = \frac{P}{3EI_{AB}} \left[\left(1 - \frac{I_{AB}}{I_{BC}} \right) \beta^3 - L^3 \right]$$

$$12-10. \theta_C = \frac{P}{2E} \left[\frac{1}{I_{AB}}(L^2 - \beta^2) + \frac{\beta}{I_{BC}} \right]$$

$$12-11. \theta_A = -\frac{3}{8} \frac{PL^2}{EI}, v_C = -\frac{PL^3}{6EI}$$

$$12-13. \theta_{\text{máx}} = -\frac{M_0L}{EI}, \psi = -\frac{M_0x^2}{2EI}, v_{\text{máx}} = -\frac{M_0L^2}{2EI}$$

$$12-14. \theta_A = -\frac{M_0L}{3EI}, v = \frac{M_0}{6EIL}(3Lx^2 - x^3 - 2L^2x),$$

$$v_{\text{máx}} = \frac{-0.0642M_0L^2}{EI}$$

$$12-15. \theta_B = \frac{M_0L}{6EI}, v|_{x=L} = \frac{-M_0L^2}{16EI}$$

$$12-17. \theta_A = \frac{M_0a}{2EI}, v_{\text{máx}} = -\frac{5M_0a^2}{8EI}$$

$$12-18. \theta_C = \frac{4M_0L}{3EI}, v_1 = \frac{M_0}{6EIL}[-x_1^3 + L^2x_1],$$

$$v_2 = \frac{M_0}{6EIL}[-3Lx_2^3 + 8L^2x_2 - 5L^3], v_C = -\frac{5M_0L^2}{6EI}$$

$$12-19. \theta_A = \frac{M_0L}{6EI}$$

$$12-21. \theta_B = \frac{wa^3}{6EI}, v_1 = \frac{wx_1^2}{24EI}[-x_1^2 + 4ax_1 - 6a^2],$$

$$v_3 = \frac{wa^3}{24EI}[4x_3 + a - 4L], v_H = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4L)$$

$$12-22. v_{\text{máx}} = \frac{-18.8 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

$$12-23. 1.375 \text{ N}$$

$$12-25. \theta_{\text{máx}} = \frac{w_0L^3}{45EI}$$

$$12-26. v_{\text{máx}} = -\frac{0.00652w_0L^4}{EI}$$

$$12-27. \theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}, v = \frac{w_0x}{960EIL}[40L^2x^2 - 16x^4 - 25L^4],$$

$$v_{\text{máx}} = \frac{w_0L^4}{120EI}$$

$$12-29. v_B = -\frac{PL^3}{2EI_0}$$

$$12-30. v_C = -\frac{PL^3}{32EI_C}$$

$$12-31. v_{\text{máx}} = \frac{6PL^3}{Ebt^3}$$

$$12-33. 12 \text{ pies}, 9 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

$$12-34. v = \frac{1}{EI} \left[-2.5x^2 + 2(x-4)^3 - \frac{1}{8}(x-4)^4 + \right.$$

$$\left. 2(x-12)^3 + \frac{1}{8}(x-12)^4 - 24x + 136 \right] \text{ kip} \cdot \text{pie}^3$$

$$12-35. v = \frac{1}{EI} \left[-\frac{Pb}{6a}x^3 + \frac{P(a+b)}{6a}(x-a)^3 + \frac{Pab}{6}x \right]$$

$$12-37. v = \frac{1}{EI}[-1.67x^3 - 6.67(x-20)^3 +$$

$$18.3(x-40)^3 + 4000x] \text{ lb} \cdot \text{pulg}^3$$

$$12-38. v = \frac{1}{EI}[-8.33x^3 + 17.1(x-12)^3 -$$

$$13.3(x-36)^3 + 1680x - 5760] \text{ lb} \cdot \text{pulg}^3$$

$$12-39. \theta_A = -\frac{1920}{EI}, \theta_B = \frac{6720 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{EI}$$

$$12-41. v = \frac{1}{EI}[-0.0833x^3 + 3(x-8)^2 + 3(x-16)^2 + 8.00x]$$

$$12-42. \theta = \frac{1}{EI}[2.25x^2 - 0.5x^3 + 5.25(x-5)^2 + 0.5(x-5)^3 - 3.125] \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$v = \frac{1}{EI}[0.75x^3 - 0.125x^4 + 1.75(x-5)^3 + 0.125(x-5)^4 - 3.125x] \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$12-43. v = \frac{1}{EI}[-0.00556x^5 + 12.9(x-9)^3 + 0.00556(x-9)^5 - 256x + 2637] \text{ kip} \cdot \text{pie}^3$$

$$12-45. v = \frac{1}{EI}\left[-\frac{10}{3}x^3 + \frac{10}{3}(x-1.5)^3 + \frac{10}{3}(x-4.5)^3 + 67.5x - 90\right] \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

$$12-46. v = \frac{1}{EI}[-0.05x^3 - 0.000741x^5 + 0.9(x-9)^3 + 0.0333(x-9)^4 + 0.000741(x-9)^5 + 8.91x] \text{ kip} \cdot \text{pie}^3$$

$$v_C = -0.765 \text{ pulg}$$

$$12-47. \theta_B = 0.574^\circ, v_C = 0.200 \text{ pulg}$$

$$12-49. \theta_A = -0.128^\circ, \theta_B = 0.128^\circ$$

$$12-50. v = \frac{1}{EI}\left[-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{4}(x-L)^3 + \frac{w}{24}(x-L)^4 + \frac{wL^3}{3}x - \frac{7wL^4}{24}\right], \theta_A = \frac{wL^3}{6EI}$$

$$12-51. v_C = -\frac{7wL^4}{24EI}$$

$$12-53. -3.64 \text{ mm}$$

$$12-54. \theta_C = \frac{3937.5}{EI}, \Delta_C = \frac{50\,625}{EI}$$

$$12-55. \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}, \Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$12-57. \theta_B = \frac{3Pa^2}{EI}, \Delta_C = \frac{4Pa^3}{3EI}$$

$$12-58. \theta_C = \frac{5Pa^2}{2EI}, \Delta_B = \frac{25Pa^3}{6EI}$$

$$12-59. \theta_B = \frac{Pa^2}{12EI}, \Delta_C = \frac{Pa^3}{12EI}$$

$$12-61. \theta_{\max} = \frac{M_0L}{2EI}, \Delta_{\max} = \frac{M_0L^2}{8EI}$$

$$12-62. \theta_{\max} = \frac{5PL^2}{16EI}, \Delta_{\max} = \frac{3PL^3}{16EI}$$

$$12-63. \Delta_C = \frac{5M_0L^2}{6EI}, \theta_C = \frac{4M_0L}{3EI}$$

$$12-65. \Delta_{\max} = \frac{0.00812 PL^3}{EI}$$

$$12-66. \Delta_C = \frac{84}{EI}, \theta_A = \frac{8}{EI}, \theta_B = \frac{16}{EI}, \theta_C = \frac{40}{EI}$$

$$12-67. 6.43 \text{ lb}, 2.14 \text{ pulg}$$

$$12-69. \theta_C = \frac{5Pa^2}{2EI}, \Delta_B = \frac{25Pa^3}{6EI}$$

$$12-70. \theta_A = \frac{3PL^2}{8EI}, \Delta_C = \frac{PL^3}{6EI}$$

$$12-71. \Delta_{\max} = \frac{11Pa^3}{48EI}$$

$$12-73. \theta_B = \frac{7Pa^2}{4EI}, \Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI}$$

$$12-74. 6.54^\circ$$

$$12-75. 0.987 \text{ pulg}$$

$$12-77. 8.93 \text{ kN}$$

$$12-78. \theta_B = \frac{M_0(b^3 + 3ab^2 - 2a^3)}{6EI(a+b)^2}, \Delta_C = \frac{M_0ab(b-a)}{3EI(a+b)}$$

$$12-79. \theta_A = \frac{17Pa^2}{12EI}, \Delta_{\max} = \frac{481Pa^3}{288EI}$$

$$12-81. t_{CIA} = \frac{40}{EI}$$

$$12-82. 2.12 \text{ pulg}$$

$$12-83. W12 \times 14, 0.560 \text{ pulg}, 0.903 \text{ pulg}$$

$$12-85. \theta_A = \theta_B = 0.175^\circ$$

$$12-86. \theta_B = \frac{7wa^3}{12EI}, \Delta_C = \frac{25wa^4}{48EI}$$

$$12-87. \theta_A = \frac{PL^2}{12EI}, \Delta_D = \frac{PL^3}{8EI}$$

$$12-89. 0.933 \text{ pulg}$$

$$12-90. 0.895 \text{ pulg} \downarrow$$

$$12-91. 0.429 \text{ pulg}$$

$$12-93. 1.90 \text{ pulg}$$

$$12-94. W16 \times 50$$

$$12-95. W14 \times 34$$

$$12-97. \Delta_A = \frac{Pa^2(3b+a)}{3EI}$$

- 12-98. $\Delta = PL^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{L}{3EI} \right)$
- 12-99. $\Delta_A = PL^3 \left(\frac{1}{12EI} + \frac{1}{8JG} \right)$
- 12-101. $\frac{x_{\max}}{y_{\max}} = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta$, $y_{\max} = 0.736$ pulg,
 $x_{\max} = 3.09$ pulg
- 12-102. 5.82 pulg
- 12-103. $A_x = 0$, $B_y = \frac{5}{16}P$, $A_y = \frac{11}{16}P$, $M_A = \frac{3PL}{16}$
- 12-105. $A_x = 0$, $B_y = \frac{3wL}{8}$, $A_y = \frac{5wL}{8}$, $M_A = \frac{wL^2}{8}$
- 12-106. $B_x = 0$, $A_y = 394$ lb, $B_y = 3.21$ kip,
 $M_B = 122$ kip · pulg
- 12-107. $A_x = 0$, $B_y = \frac{1}{10}w_0L$, $A_y = \frac{2}{5}w_0L$, $M_A = \frac{1}{15}w_0L^2$
- 12-109. $C_x = 0$, $B_y = 14.4$ kip, $C_y = 1.07$ kip ↓,
 $A_y = 10.7$ kip
- 12-110. $T_{AC} = \frac{3A_2E_2wL_1^4}{8(A_2E_2L_1^3 + 3E_1I_1L_2)}$
- 12-111. $M_A = \frac{wL^2}{12}$, $M_B = \frac{wL^2}{12}$
- 12-113. $M_A = \frac{5wL^2}{192}$, $M_B = \frac{11wL^2}{192}$
- 12-114. $M_A = \frac{M_0}{3}$, $M_B = \frac{M_0}{3}$
- 12-115. $A_y = \frac{P}{2}$, $M_A = \frac{PL}{8}$, $B_y = \frac{P}{2}$, $M_B = \frac{PL}{8}$, $C_y = P$
- 12-117. $A_y = \frac{3M_0}{2L}$, $C_y = \frac{3M_0}{2L}$, $B_y = \frac{3M_0}{L}$, $C_x = 0$
- 12-118. $B_y = \frac{2}{3}P$, $M_A = \frac{PL}{3}$, $A_y = \frac{4}{3}P$, $A_x = 0$
- 12-119. 0.414L
- 12-121. $M_A = 0.639$ kip · pulg, $M_B = 1.76$ kip · pulg
- 12-122. $B_y = \frac{5}{8}wL$, $C_y = \frac{wL}{16}$, $A_y = \frac{7}{16}wL$
- 12-123. 0.708 pulg
- 12-125. $A_y = B_y = 2.15$ kN, $C_y = D_y = E_y = F_y = 3.42$ kN
- 12-126. $M_A = \frac{PL}{8}$, $M_B = \frac{3PL}{8}$, $B_x = 0$, $B_y = P$
- 12-127. $A_y = \frac{P}{2}$, $A_x = 0$, $M_A = \frac{PL}{2}$, $B_y = \frac{P}{2}$, $B_x = 0$,
 $M_B = \frac{PL}{2}$
- 12-129. $M_A = M_B = \frac{1}{24}PL$, $A_y = B_y = \frac{1}{6}P$, $C_y = D_y = \frac{1}{3}P$
- 12-130. $B_y = 634$ lb, $A_y = 243$ lb, $C_y = 76.8$ lb
- 12-131. $F_{\text{res}} = \frac{3kwL^4}{24EI + 8kL^3}$
- 12-133. $R = \left(\frac{8\Delta EI}{9w_0} \right)^{1/4}$, $a = L - \left(\frac{72\Delta EI}{w_0} \right)^{1/4}$
- 12-134. $M = \frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L}\alpha$, $\Delta_{\max} = \frac{PL^3}{192EI} + \frac{\alpha L}{4}$
- 12-135. $v = \frac{1}{EI}[-30x^3 + 46.25(x-12)^3 - 11.7(x-24)^3 + 38700x - 412560]$
- 12-137. $v_{\max} = \frac{wL^4}{18\sqrt{3EI}}$
- 12-138. $\theta_B = \frac{Pa^2}{4EI}$, $\Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI}$
- 12-139. $A_y = 81.3$ N, $B_y = 138$ N, $C_y = 18.8$ N
- 12-141. $B_y = C_y = \frac{11wL}{10}$, $A_y = \frac{2wL}{5}$, $D_y = \frac{2wL}{5}$, $D_x = 0$
- 12-142. $a = \frac{3L}{16}$
- 12-143. $a = \frac{L}{3}$

Capítulo 13

- 13-1. $P_{\text{cr}} = \frac{5kL}{4}$
- 13-2. $P_{\text{cr}} = kL$
- 13-3. $P_{\text{cr}} = \frac{4k}{L}$
- 13-5. 1.74 pulg
- 13-6. 2.58 pulg
- 13-7. 1.81 pulg
- 13-9. 377 kip
- 13-10. 94.4 kip
- 13-11. 20.4 kip
- 13-13. 8.43 pulg, 245 kip
- 13-14. 6.07 pulg
- 13-15. 4.73 pulg
- 13-17. 475 kip
- 13-18. 28.4 kip
- 13-19. 58.0 kip
- 13-21. $d_i = 1\frac{1}{8}$ pulg
- 13-22. 73.2 kip
- 13-23. 37.5 kip
- 13-25. $d = 1\frac{1}{4}$ pulg
- 13-26. 13.2 kip