

Problema 1

En la viga mostrada en la figura 1, calcule las reacciones. En la sección a-a, determine las fuerzas internas de corte y normal y el momento flector interno.

$$P := 5000 \text{ lbf}$$

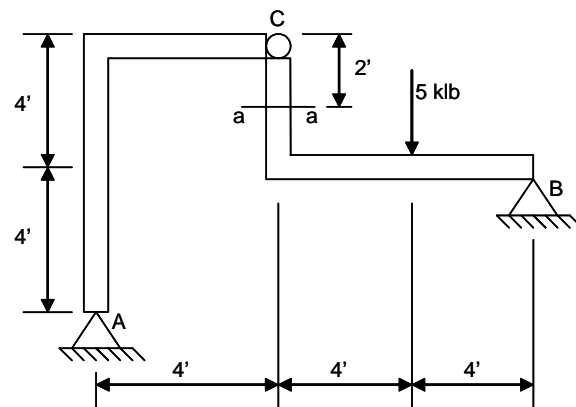


Figura 1

Primero se debe hacer el análisis estático sobre todo el cuerpo. El DCL es el de la figura 2.

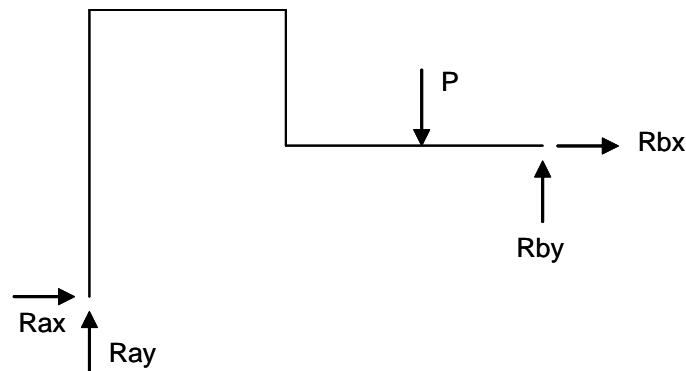


Figura 2

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_{ax} + R_{bx} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{by} - P = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad -P \cdot 8\text{ft} + R_{by} \cdot 12\text{ft} - R_{bx} \cdot 4\text{ft} = 0$$

Se tienen 4 incógnitas, pero sólo 3 ecuaciones, por lo que se debe buscar una cuarta. Esta proviene de que el cuerpo está dividido por una rótula en C, por lo cual se debe asegurar que ambos lados del cuerpo estén en equilibrio con respecto a la rótula. Se prefiere el lado de la derecha de la rótula, que se observa en la figura 3. La sumatoria de momento se hace con respecto a C, para evitar que aparezcan 2 nuevas incógnitas, R_{cx} y R_{cy} .



$$\Sigma M_C = 0 \quad -P \cdot 4\text{ft} + R_{by} \cdot 8\text{ft} + R_{bx} \cdot 4\text{ft} = 0$$

De lo que se obtiene que:

$$R_{ax} := 1000\text{lbf}$$

$$R_{ay} := 2000\text{lbf}$$

$$R_{bx} := -1000\text{lbf}$$

$$R_{by} := 3000\text{lbf}$$

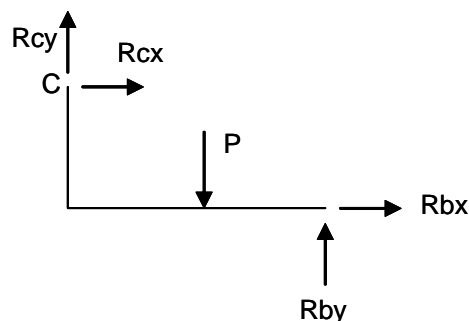


Figura 3

Ya calculadas las reacciones, ahora se pueden calcular las fuerzas y momento internos en la sección a-a. Se debe elegir una de las mitades del cuerpo para cortar. Se prefiere la sección que no incluye la rótula que se observa en la figura 4.

En la sección de la figura 4, se hace equilibrio de fuerzas y momento según el punto B por simplificación de las ecuaciones.

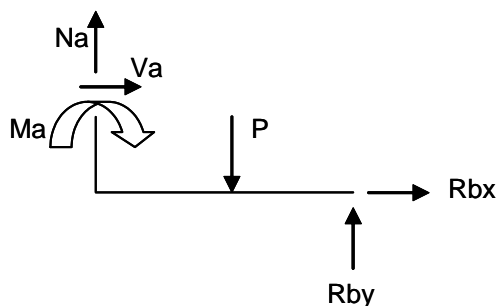


Figura 4

$$\Sigma F_x = 0 \quad N_a + R_{by} - P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad V_a + R_{bx} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad P \cdot 2\text{ft} - M_a - V_a \cdot 2\text{ft} - N_a \cdot 8\text{ft} = 0$$



$$N_a := 2000\text{lbf}$$

$$V_a := 1000\text{lbf}$$

$$M_a := -8000\text{lbf} \cdot \text{ft}$$

Puntaje:

- Diagramas de cuerpo libre: total 1 punto
- Planteación de ecuaciones de equilibrio 1 punto
- 4° ecuación debido a la rótula 1 punto
- Obtención de reacciones 1 punto
- Ecuaciones de equilibrio sección a-a 1 punto
- Obtención de reacciones en la sección a-a
- Si existe un error de arrastre numérico, pero no teórico, no se debe castigar el puntaje nuevamente. Si el error es teórico debe evaluarse el caso, pero no se aspira a más de un 75% del puntaje máximo.
- Errores teóricos o de grandes simplificaciones deben castigarse de justa manera, aspirando máximo a un 50% del puntaje total. Lo mismo si se explica lo que se tiene que hacer en palabras, pero no se resuelve.
- En caso de errores bien comentados por el alumno se podrá premiar con una parte del puntaje no mayor a un 25%.

Problema 2

A lo largo de la viga mostrada en la figura 5, calcule la fuerza interna y el momento flector. Dibuje los diagramas correspondientes e indique los valores máximos.

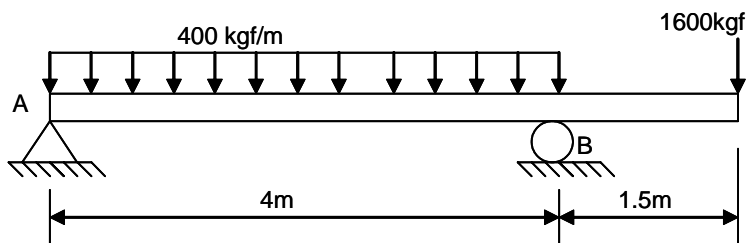


Figura 5

Primero se debe hacer el equilibrio estático sobre toda la viga de la figura 5. Siendo R_a la reacción vertical en A y R_b la reacción vertical en B, se tiene:

$$\sum F_y = 0 \quad R_a + R_b - \left(400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot 4\text{m} \right) - 1600\text{kgf} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot 4\text{m} \cdot 2\text{m} + (R_b \cdot 4\text{m}) - 1600\text{kgf} \cdot (4\text{m} + 1.5\text{m}) = 0$$



$$R_a := 200\text{kgf}$$

$$R_b := 3000\text{kgf}$$

Análisis por secciones:

$0 \leq x < 4\text{m}$ Se tiene la sección de la figura 6.

Equilibrio estático:

$$\sum F_y = 0 \quad R_a + V_{1x} - 400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} x = 0$$

$$V_1(x) := \frac{-(R_a \cdot m - 400 \cdot \text{kgf} \cdot x)}{m}$$

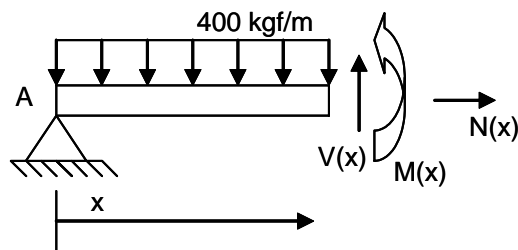


Figura 6

Nota: el punto "r" se encuentra justo en el punto de corte.

$$\sum M_r = 0 \quad M_{1x} + \left(400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \right) - R_a \cdot x = 0$$

$$M_1(x) := x \cdot \frac{-200 \cdot \text{kgf} \cdot x + R_a \cdot m}{m}$$

$4\text{m} \leq x < 5.5\text{m}$

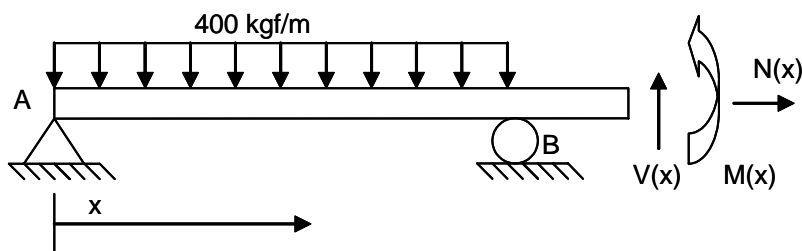


Figura 7

Se tiene la sección de la figura 7.

Equilibrio estático:

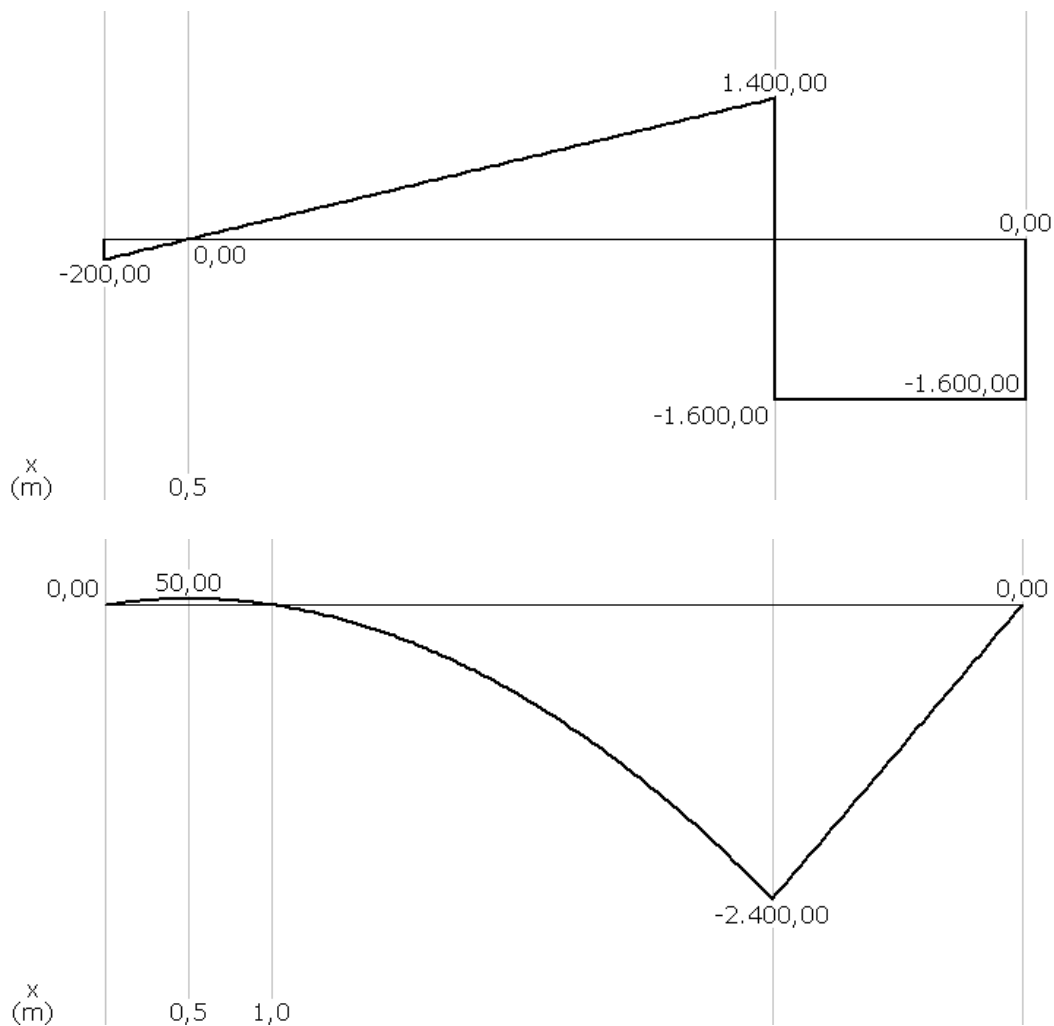
$$\Sigma F_y = 0 \quad R_a + V_{2x} - \left(400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot 4\text{m}\right) + R_b = 0$$

$$V_2(x) := -R_a + 1600 \cdot \text{kgf} - R_b$$

$$\Sigma M_r = 0 \quad M_{2x} + \left[400 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \cdot 4\text{m} \cdot (x - 2\text{m})\right] - (R_a \cdot x) - R_b \cdot (x - 4\text{m}) = 0$$

$$M_2(x) := -1600 \cdot \text{kgf} \cdot x + 3200 \cdot \text{kgf} \cdot \text{m} + R_a \cdot x + R_b \cdot x - 4 \cdot R_b \cdot \text{m}$$

Diagramas de fuerzas y momentos internos:



Puntaje:

- Diagramas de cuerpo libre: cada uno 0.5 puntos, total 1.5 puntos
- Ecuaciones de equilibrio generales: 1 punto
- Reacciones: 0.5 puntos
- Primera sección: 1 punto
- Segunda sección: 1 punto
- Diagramas de corte y momento: 0.5 puntos cada uno, total 1 punto
- Si existe un error de arrastre numérico, pero no teórico, no se debe castigar el puntaje nuevamente. Si el error es teórico debe evaluarse el caso, pero no se aspira a más de un 75% del puntaje máximo.
- Errores teóricos o de grandes simplificaciones deben castigarse de justa manera, aspirando máximo a un 50% del puntaje total. Lo mismo si se explica lo que se tiene que hacer en palabras, pero no se resuelve.
- En caso de errores bien comentados por el alumno se podrá premiar con una parte del puntaje no mayor a un 25%.

Problema 3

La barra central CD del conjunto mostrado en la figura 8 se calienta de $T_1=30^\circ\text{C}$ a $T_2=180^\circ\text{C}$ por medio de una resistencia eléctrica. También las dos barras extremas AB y EF se calientan de $T_1=30^\circ\text{C}$ a $T_2=50^\circ\text{C}$. A la temperatura inferior T_1 el espacio entre C y la barra rígida BF es de 0.7 mm. Determine el esfuerzo en las barras AB y EF causada por el incremento de temperatura. Las barras AB y EF son de acero y tienen una sección transversal de 125 mm^2 . La barra CD es de aluminio y tiene una sección transversal de 375 mm^2 .

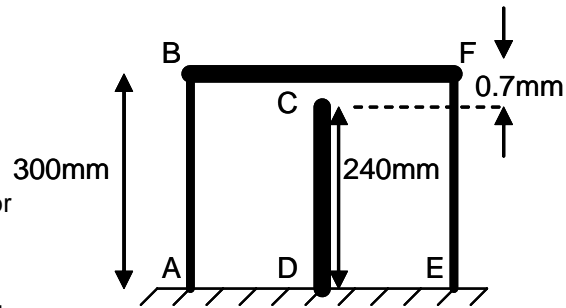


Figura 8

Datos:

$$E_{\text{alum}} := 70 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \alpha_{\text{alum}} := 23 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$$E_{\text{ac}} := 200 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \alpha_{\text{ac}} := 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$$L_{\text{ac}} := 300 \text{ mm} \quad A_{\text{ac}} := 125 \text{ mm}^2$$

$$L_{\text{alum}} := 240 \text{ mm} \quad A_{\text{alum}} := 375 \text{ mm}^2$$

El sistema se puede dividir por barra, que se pueden apreciar en las figuras 9, 10 y 11.

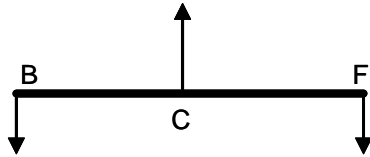


Figura 9

Las barras AB y EF son idénticas y además el problema es simétrico, por lo que la reacción y deformación en ambas tendrán las mismas magnitudes.

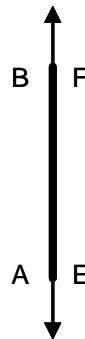


Figura 10



Figura 11

Entonces: $R_C - R_B - R_F = 0$ y $R_B = R_F$ por lo que $R_C = 2R_B$

Deformación barras AB y EF de acero:

$$\delta_{\text{ac}} = \frac{R_B \cdot L_{\text{ac}}}{E_{\text{ac}} \cdot A_{\text{ac}}} + \alpha_{\text{ac}} \cdot L_{\text{ac}} \cdot (50^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})$$

Deformación barra CD de aluminio:

$$\delta_{\text{alum}} = \frac{-R_C \cdot L_{\text{alum}}}{E_{\text{alum}} \cdot A_{\text{alum}}} + \alpha_{\text{alum}} \cdot L_{\text{alum}} \cdot (180^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})$$

Además se tiene que antes del cambio de temperatura había una holguta de 0.7 mm entre la barra de aluminio y la barra rígida BF, por lo que la condición geométrica queda:

$$\delta_{\text{alum}} + 0.07 \text{ mm} = \delta_{\text{ac}}$$

$$\frac{-(2R_B) \cdot L_{\text{alum}}}{E_{\text{alum}} \cdot A_{\text{alum}}} + \alpha_{\text{alum}} \cdot L_{\text{alum}} \cdot (180^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}) + 0.07\text{mm} = \frac{R_B \cdot L_{\text{ac}}}{E_{\text{ac}} \cdot A_{\text{ac}}} + \alpha_{\text{ac}} \cdot L_{\text{ac}} \cdot (50^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})$$



$$R_B = 2.727 \times 10^4 \text{ N}$$

El esfuerzo en las barras de acero es:

$$\sigma_{\text{ac}} := \frac{R_B}{A_{\text{ac}}} \quad \sigma_{\text{ac}} = 2.182 \times 10^8 \text{ Pa}$$

Puntaje:

- Diagramas de cuerpo libre: 1 punto
- Ecuaciones de equilibrio: 1 punto
- Deformación por temperatura en acero: 0.5 puntos
- Deformación por Fuerza Normal en acero: 0.5 puntos
- Deformación por temperatura en aluminio: 0.5 puntos
- Deformación por Fuerza Normal en aluminio: 0.5 puntos
- Compatibilidad geométrica: 1 punto
- Cálculo esfuerzo en acero: 0.5 puntos
- Si existe un error de arrastre numérico, pero no teórico, no se debe castigar el puntaje nuevamente. Si el error es teórico debe evaluarse el caso, pero no se aspira a más de un 75% del puntaje máximo.
- Errores teóricos o de grandes simplificaciones deben castigarse de justa manera, aspirando máximo a un 50% del puntaje total. Lo mismo si se explica lo que se tiene que hacer en palabras, pero no se resuelve.
- En caso de errores bien comentados por el alumno se podrá premiar con una parte del puntaje no mayor a un 25%.