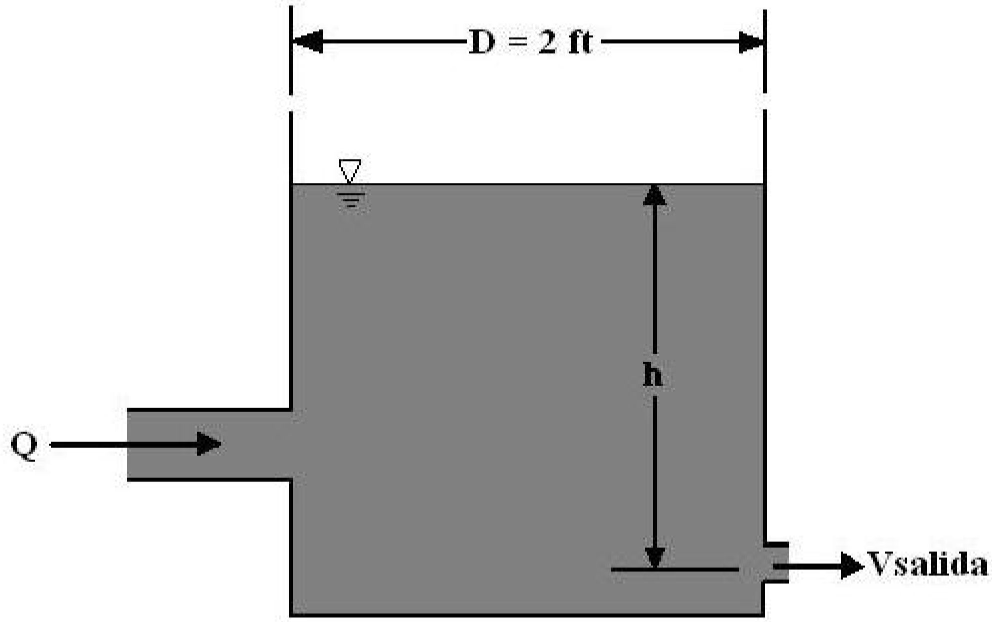
PAUTA P2 EJERCICIO 3 ME33A



Ecuaciones básicas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad V = \pi\cdot\frac{D^2}{4}\cdot h \qquad (2)$$

donde V es el volumen del estanque.

Supuesto:

ρ=constante

Al derivar la ecuación (2) con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} = \pi\cdot\frac{D^2}{4}\cdot\frac{dh}{dt} \quad (3)$$

Al reemplazar (3) en (1) se obtendrá:

$$\rho\cdot\left[\frac{\partial(V)}{\partial t} - Q + \sqrt{2gh}\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi\cdot D^2}{4}\right)\frac{dh}{dt} - Q + \sqrt{2gh}\cdot\left(\frac{\pi\cdot d^2}{4}\right) = 0 \qquad (3)$$

Que corresponde a una ecuación de la forma:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} + B \cdot \sqrt{h} - Q = 0$$

con $A = \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)$ y $B = \sqrt{2g} \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \right)$

Despejando:

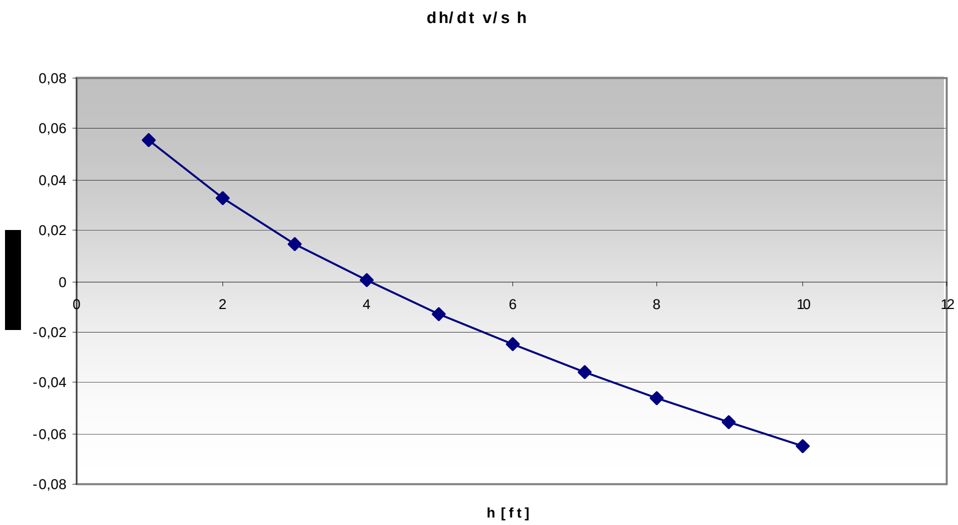
$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q - B \cdot \sqrt{h}}{A}$$

Escrita con $C = \left(\frac{Q}{A} \right) = 0.111408 \left[ft/s \right]$ y $D = \left(\frac{B}{A} \right) = 0.055688 \left[ft^{0.5}/s \right]$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = C - D \cdot \sqrt{h} \qquad (4)$$

Con esto ya es posible analizar la evolución de $\frac{dh}{dt}$ según h:

$$h < 4[ft] \Rightarrow \frac{dh}{dt} > 0$$
$$h = 4[ft] \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0$$
$$h > 4[ft] \Rightarrow \frac{dh}{dt} < 0$$



Lo anterior se puede interpretar así:

Si h está entre 9 y 4 [ft], el nivel del agua caerá hasta llegar a 4 [ft], donde al menos permanecerá constante.

(Se ha dispuesto que el problema queda hasta acá, porque no se entregó la indicación sobre como resolver la integral)

Con los datos que tenemos, podemos plantear:

$$\int_{h1}^{h2} \frac{dh}{C - D \cdot \sqrt{h}} = \int_{t1}^{t2} dt$$

La solución de la integral es:

$$\int \frac{dx}{c + \sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b} - c\ln\left|c + \sqrt{ax+b}\right|\right)$$

donde $b = 0$, $c = C$ y $\sqrt{a} = -D$

$$\boxed{\Rightarrow \int \frac{dh}{C - D \cdot \sqrt{h}} = -\frac{2}{D^2}\left(D \cdot \sqrt{h} - C\ln\left|C - D \cdot \sqrt{h}\right|\right)}$$

Cuya condición de borde es en t = 0, h = 9 [ft].

<u>Puntaje:</u>

1.0 punto base.
4.0 puntos obtención de expresión (3).
1.5 puntos expresión (4) con análisis de dh/dt v/s h.
0.5 puntos comentarios.