Tarea # 2 Analisis Numerico de EDP

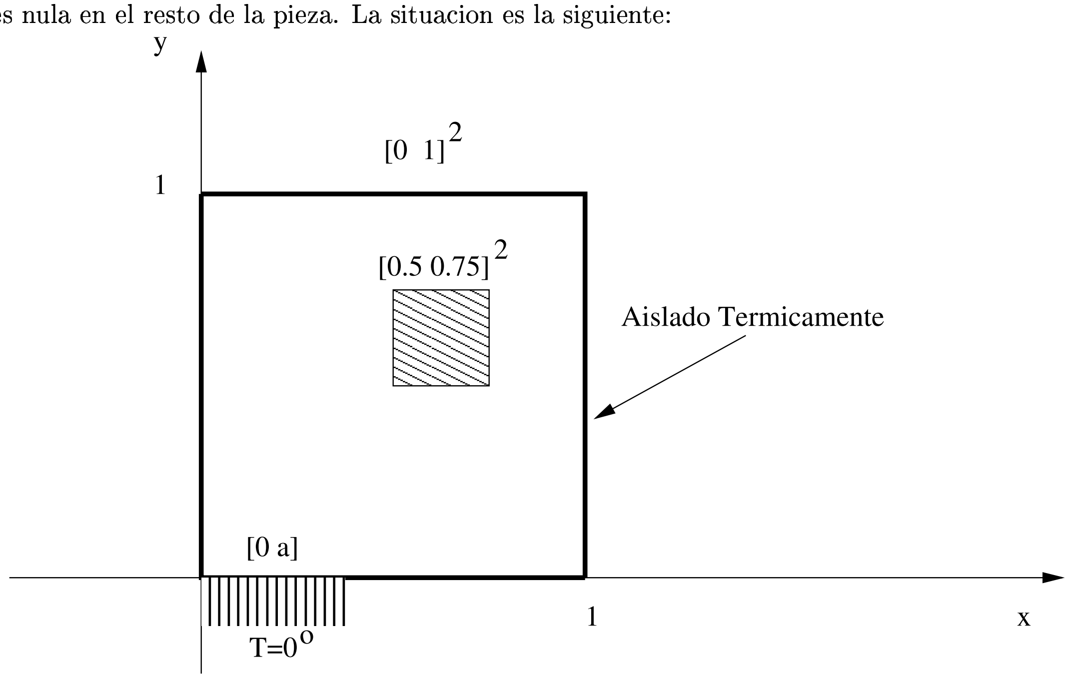
Se debe resolver la ecuacion del calor (estacionaria) en el cuadrado $\Omega = [0,1]^2$, en donde todo el contorno Γ esta aislado termicamente, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

excepto el fragmento $\Gamma_1 = [0,a] \times \{0\}$ del eje OX, que esta en contacto con una temperatura de 0^o (una ventana en la pieza, por ejemplo). Ademas, al interior del dominio, hay una "estufa" (que se modelo como una fuente de calor f) para calentar la pieza, que ocupa la zona $\Omega_i = [0.5,\, 0.75]^2$. Esto es

$$f(x) = 1 \text{ en el cuadrado } \Omega_i$$

y es nula en el resto de la pieza. La situacion es la siguiente:



Discretizar, usando diferencias finitas, este problema, cuyo modelo seria el que sigue:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ en } \Gamma \setminus \Gamma_1 \\ u &= 0 \text{ en } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Resolver en varias mallas, para $a = 0.5$ y escoger una malla que les parezca adecuada para presentar los resultados. Buscar una discretizacion de la condicion de Newmann que sea $o(h^2)$(Idea, usar Taylor y aprovechar la ecuacion para reemplazar las derivadas segundas "segun la direccion normal" por derivadas segundas "segun la direccion tangente"). Por ejemplo, en la pared vertical de la izquierda:

$$u(h, y) = u(0, y) + \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(0, y)}{\partial x^2} h^2 + o(h^3).$$

Asi, el termino de la izquierda sera un valor en la malla, el primer termino a la derecha de la igualdad, tambien. El segundo termino es la derivada normal y el tercer termino, una derivada segunda que puede reemplazarse por una derivada segunda segun y lo que permite usar la formula centrada.