2001/1 en adelante

MA 53-L ANALISIS NUMERICO DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

(12 U.D.)

Distribución horaria:
4.5 hrs. clases
1.5 hrs. ejercicios
6.0 hrs. Trabajo personal

REQUISITO: MA 46A o MA 46B

OBJETIVOS:
Presentar las dos técnicas usuales de resolución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales, cuales son, el Método de Elemento Finitos y el de Diferencias Finitas. El primero de ellos se estudia en detalle a través de la resolución de problemas elípticos de segundo orden, y las diferencias finitas se presentan aplicadas a la resolución de Sistemas de Leyes de Conservación Escalares.

PROGRAMA:

I.- Análisis Numérico de problemas Elípticos. Método de elementos finitos.

1.- Breve repaso de problemas elípticos abstractos.

1.1. Teorema de Stampacchia y consecuencias. Caso simétrico.
1.2. Métodos de Galerkin y de Riesj-Galerkin; aspectos teóricos.
1.3. Ejemplos de problemas elípticos de segundo y cuarto orden, lineales.
1.4. Un par de ejemplos de problemas elípticos de segundo orden, no lineales (por ejemplo, problemas de obstáculo o de Signorini, o del dique, o de la torción elasto-plástica, o cualquier otro problema de restricciones unilaterales).

2.- El método de elementos finitos en la resolución de problemas de segundo orden lineales.
2.1. Introducir el método como caso particular del método de aproximación de Galerkin. Noción de aproximación conforme, de clase C' y C^1.
2.2. Elementos básicos de la teoría: Noción de triangula ción, de subespacio aproximante y de elemento finito; definido como una tripleta $\{K, P, \sigma\}$, donde K

representa la geometría, P el espacio de polinomios asociado, y σ los grados de libertad del elemento finito. Noción de elemento finito P-unisolvente.

2.3. Ejemplos de elementos finitos del tipo Lagrange: N-simplex (triángulos o tetrahedros) del tipo (1), (2), (3),(2'), (3'), y en general del tipo $(k), k \geq 1$. Otros ejemplos en los cuales K sea también un N-simplex. N-rectángulos del tipo $(k), k \geq 1$, y otros donde K sea un N-rectángulo. Asamblaje de elementos finitos del tipo Lagrange.

2.4. Ejemplos de elementos finitos del tipo Hermite: Triángulo del tipo (3) y (3'). Ejemplos de elementos finitos de clase C^1: triángulos de Argivys y de Bell. Asamblaje de elementos finitos del tipo Hermite.

2.5. Interpolación por familias afines de elementos finitos: Noción de elementos finitos afines equivalentes y asamblaje de tales familias. Definición y propiedades básicas de los operadores de interpolación.

2.6. Aspectos generales sobre la implementación computacional del método.

3.- Convergencia del método de elementos finitos.

3.1. Generalidades sobre los resultados de convergencia o Lema de Cea.

3.2. Teoría de interpolación en espacios de Sobolev: estimación del error de interpolación por operadores invariantes en espacios de polinomios.

3.3. Aplicaciones al caso de aproximación por elementos finitos en dominios poligonales.

3.4. Lema de Aubin-Nitsche; estimación del error de aproximación en media cuadrática.

II.- Análisis numérico de sistemas de ecuaciones hiperbólicas escalares de primer orden. Métodos de diferencias finitas.

4.- Sistemas de leyes de conservación escalares de primer orden. Ejemplos.

4.1. Presentación general.

4.2. Ejemplos fundamentales: ecuación de Burgers, ecuación de Buckley-Leverett, el p-sistema, ecuaciones de la dinámica de los gases en coordenadas de Euler y de Lagrange.

4.3. Solución débil de un sistema hiperbólico de primer orden: Noción de curva característica, ejemplos que ilustren la presencia de "choques" (o discontinuidades) y de no unicidad de la solución, condición de Rankine-Hugoniot, noción de solución de entrópica.

4.4. Problema de Riemann: definición y propiedades básicas.

5.- Método de diferencias finitas en la aproximación de leyes de conservación escalares de primer orden.

5.1. Generalidades sobre los métodos de diferencias finitas.

5.2. El esquema de Godunov para un sistema hiperbólico escalar de primer orden, y variantes: método de Roe.
5.3. Esquemas decentrados y de descomposición del flujo.
5.4. Esquemas de segundo orden: métodos de Lax-Wlendroff.