MA38B – Análisis I

Tarea 5

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

1. Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico compacto $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ una función semicontinua inferior. Pruebe que

$$g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

es semicontinua inferior.

2. Considere un espacio topológico X con un conjunto denso A en X. Supongamos que $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ y definamos

$$f_*(x) = \liminf_{y \to x, y \in A} f(y) \stackrel{def}{=} \inf\{\liminf_{\lambda} f(y_\lambda)|\ y_\lambda \text{ es red en } A,\ y_\lambda \to x\}.$$

Pruebe que $f_* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior, $f_* \leq f$. Muestre además que si $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferior y $g \leq f$ entonces $g \leq f_*$.

3. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$.

Pruebe que si Y es Hausdorff y f es continua entonces el grafo de f, $G = \{(x, f(x))|x \in X\}$ es cerrado.

Recíprocamente, demuestre que si Y es compacto y el grafo de f es cerrado entonces f es continua.

4. Sea X un espacio compacto, Y un espacio topológico y $p_Y : X \times Y \to Y$, $p_Y(x, y) = y$. Pruebe que p_Y es una aplicación cerrada.

5. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ tal que $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in X$.

Para $a, b \in X$ definamos $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero n tal que $d(a, a_n) \leq \varepsilon$, $d(b, b_n) \leq \varepsilon$. Deducir que $d(a, b) = d(f(a), f(b))$.

6. Considere un espacio métrico separable (X, d) con una métrica $d \leq 1$. Denotemos por $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ un denso numerable en X. Muestre que la función $f : X \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$ definida por $f(x) = (d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es un homeomorfismo en su imagen.

7. Sea X un espacio compacto, R una relación de equivalencia en X, $p : X \to X/R$ la proyección la canónica y $G = \{(x, y) \in X \times X|p(x) = p(y)\}$. Pruebe la equivalencia de las afirmaciones siguientes

1. X/R es Hausdorff
2. G es cerrado
3. p es una aplicación cerrada

Pruebe además que si X es normal y p es una aplicación cerrada, entonces X/R es normal.

8. En este ejercicio (X, d) denota un espacio métrico compacto no vacío. Se propone demostrar que existe una sobreyección continua del conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) en X. Para esto definamos $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}([1,n],\{0,1\})$ (aquí $[1,n]$ denota los naturales entre 1 y n), $\mathcal{E} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$. Para cada $\varepsilon \in \mathcal{E}$ construya un conjunto compacto no vacío $A_\varepsilon \subset X$ tal que

1. $X = A_0 \cup A_1$
2. para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}_n$ $A_\varepsilon = A_{\varepsilon'} \cup A_{\varepsilon''}$ donde $\varepsilon', \varepsilon'' \in \mathcal{E}_{n+1}$ son las dos extensiones posibles de ε.
3. para todo $\varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, si escribimos $\varepsilon_n = \varepsilon|_{[1,n]}$ se tiene que $diam(A_{\varepsilon_n}) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Con la construcción anterior (y la notación anterior), si $\varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ justifique que el conjunto $\cap_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon_n}$ contiene un único punto que denotamos por $\Phi(\varepsilon)$. Muestre que $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to X$ es sobreyectiva y continua.

9. Muestre que si (X, d) es un espacio métrico compacto, Y es un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ es sobreyectiva continua, entonces Y es compacto metrizable. De este problema y el anterior se deduce que son equivalentes

1. X es compacto metrizable
2. X es la imagen continua del conjunto de Cantor.

10. Denotemos por (X, d) un espacio métrico acotado y $\mathcal{F}$ el conjunto de cerrados no vacíos de X. Para $A, B \in \mathcal{F}$ se define

$$\rho(A,B) = max(\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{x \in B} d(x,A)).$$

- Pruebe que ρ es una distancia en $\mathcal{F}$.
- Sea $A_n \in \mathcal{F}$ una sucesión que converge a $A \in \mathcal{F}$ y $x_n \in A_n$ converge a x. Pruebe que $x \in A$.
- Sea $A_n \in \mathcal{F}$ una sucesión que converge a $A \in \mathcal{F}$. Pruebe que
$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}.$$
- Pruebe que si X es totalmente acotado entonces $\mathcal{F}$ lo es.
- Pruebe que si X es completo entonces $\mathcal{F}$ lo es.

  Ind.: sea A_n una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}$ y definamos
$$B_n = \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}, \quad B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n.$$

    - Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, m \geq n_0$ y $x \in A_k$ existe $y \in A_m$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.
    - Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_k > 0$ una sucesión tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq \varepsilon$. Construya una subsucesión A_{n_k} tal que para todo $x_0 \in \bigcup_{m \geq n_0} A_m$ (n_0 de la parte anterior) existan $x_k \in A_{n_k}$ ($k \geq 1$) tales que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon_k$ para $k \geq 0$.
    - Deducir que B es no vacío y que para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que $d(x, B) \leq \varepsilon$ para todo $x \in B_n$.
    - Deduzca que A_n converge a B.
- Muestre que si X es compacto entonces $\mathcal{F}$ lo es.