MA38B – Análisis I

Tarea 4

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

1. Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado e Y un subespacio vectorial de X. Denotemos por $\pi : X \to X/Y$ la proyección canónica. Muestre que

$$\|\pi x\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

define una seminorma en X/Y y que si Y es cerrado entonces es norma. Pruebe además que si X es Banach e Y es cerrado entonces X/Y es Banach.

2. Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado e Y un subespacio vectorial cerrado de X. Pruebe que X es Banach si y sólo si X/Y e Y son espacios de Banach.

3. Sean X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ lineal acotada y E subespacio cerrado de X tal que $E \subset Ker(T)$. Pruebe que $\widetilde{T} : X/E \to Y$ definida mediante $\widetilde{\pi} x = Tx \ \forall x \in X$ define una función lineal acotada y que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

4. Se define el producto directo de una familia de espacios normados $\{X_i | i \in I\}$ como

$$\{x \in \prod_{i \in I} X_i \mid \|x\|_\infty = \sup_{i \in I} \|P_i x\| < \infty\},$$

donde P_i denota la proyección canónica del producto en X_i.

Pruebe que si X_i es Banach para todo $i \in I$ entonces el producto directo es Banach con la norma $\| \ \|_\infty$.

5. Sea A^2 el espacio de las funciones holomorfas en $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ tales que

$$\|f\|_2 = \lim_{r \uparrow 1} \int_{B_r} |f|^2 < \infty,$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \uparrow 1} \int_{B_r} f \overline{g}.$$

Verifique que este producto interno está bien definido en A_2 y que A_2 es espacio de Hilbert. Para esto le puede ser útil probar que si $f \in A^2$

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z)} f(x)\, dx \quad \text{si } B_r(z) \subset D.$$

Con esto puede demostrar que si f_n es de Cauchy en A_2 entonces es de Cauchy uniforme sobre todo compacto $K \subset D$.

Muestre que

$$e_n(z) = \frac{(n+1)^{1/2}}{\pi^{1/2}} z^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

es una base ortonormal de A^2.

6. Sean H un Hilbert y X, Y subespacios cerrados de H con X de dimensión finita y $dim(X) < dim(Y)$. Muestre que $X^{\perp} \cap Y \neq \{0\}$.

7. Consideremos una familia de espacios de Hilbert $\{H_i | i \in I\}$ y definamos su suma directa $\sum_{i \in I} H_i$ como

$$\{x \in \prod_{i \in I} H_i | P_i x = 0 \text{ excepto una cantidad finita de índices } \},$$

donde P_i es la proyección canónica de $\prod_{i \in I} H_i$ sobre H_i. En $\sum_{i \in I} H_i$ definimos el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle P_i x, P_i y \rangle.$$

Muestre que la completación de $\sum_{i \in I} H_i$ se puede identificar con

$$\bigoplus_{i \in I} H_i = \{x \in \prod_{i \in I} H_i | \sum_{i \in I} \|P_i x\|^2 < \infty\}.$$

Observación: si $\{a_i | i \in I\}$ es una familia de números en $[0, \infty)$ definimos

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{J \subset I, J \text{ es finito}} \sum_{i \in J} a_i.$$

Pruebe que si $\sum_{i \in I} a_i < \infty$ entonces J es numerable.

8. En un espacio de Hilbert H se define la topología débil como la menos fina que hace continuas a las funciones $\{\ell_y | y \in H\}$ donde

$$\ell_y(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Pruebe que H con la topología débil es un espacio vectorial topológico Hausdorff.

Suponga ahora que H es separable y sea $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. Considere $A = \{n^{1/2} e_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que 0 pertenece a la adherencia de A con respecto a la topología débil, pero que ninguna sucesión en A converge débil a 0

Ind.: Para la primera parte verifique que dado $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ debe existir $a \in A$ tal que $|\langle a, y \rangle| \leq \varepsilon$. Para la segunda parte puede utilizar el teorema de la cota uniforme (o Banach-Steinhaus).