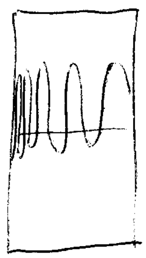
P3) a) $Q=[0,1]\times[-2,2]$

$C=\{(x,\operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \,/\, 0<x\le 1\}\cup\{(0,0)\}$

$D=Q\setminus C$

<u>D es conexo:</u>



Se tiene que $D=D_1\cup D_2$

$D_1=\{(x,y) \mid 0<x\le 1, 2\geq y>\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}\cup\{(0,y) \mid 0<y<2\}$

$D_2=\{(x,y) \mid 0<x\le 1, -2\le y<\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}\cup\{(0,y) \mid -2\le y<0\}$

D_1 y D_2 son conexos por caminos y por lo tanto conexos.

Se tiene $(0,\frac{1}{2})\in D_1$ pero también $(0,\frac{1}{2})\in\overline{D_2}$

En efecto: $\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad x_k=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $\quad k\to\infty$

$y_k=\frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen}(\frac{1}{x_k})=1$

$(x_k,y_k)\in D_2$

Como D_2 es conexo, $(0,\frac{1}{2})\in\overline{D_2}$ $\Rightarrow$ $D_2\cup\{(0,\frac{1}{2})\}$ es conexo

$\Rightarrow$ $D_1\cup D_2$ es conexo

$=\underbrace{D_1}_{\text{conexo.}}\cup\underbrace{D_2\cup\{(0,\frac{1}{2})\}}_{\text{conexo}}$

P3) a)

<u>$D = Q \setminus C$ no es conexo por caminos</u>. Supongamos que sí lo es y sea $\gamma : [0,1] \to D$ continua con $\gamma(0) = (\frac{1}{2}, 2)$, $\gamma(1) = (\frac{1}{2}, -2)$.

Como $\gamma(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in [0,1]$ $\exists B_r((0,0))$ tal que

$\forall t \in [0,1]$ $\gamma(t) \notin B_r((0,0))$.

Esto es por compacidad: si no $\forall n$ $\exists t_n \in [0,1]$ $|\gamma(t_n)| < \frac{1}{n}$.
Para una subsucesión $t_{n_k} \to t_0$ $\Rightarrow$ $\gamma(t_{n_k}) \to \gamma(t_0) = 0$, contradicción.

Definamos

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x > \frac{1}{2k\pi} \\ 0 & x \leq \frac{1}{2k\pi} \end{cases}$$

donde $k > 0$ es un entero (fijo) tal que $\frac{1}{2k\pi} < r$.

Entonces $g : [0,1] \to [-1,1]$ es continua.

Sea $h(t) = y(t) - g(x(t))$ donde $(x(t), y(t)) = \gamma(t)$.

$h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua.

$h(0) = 2 - \sin(2) > 0$
$h(1) = -2 - \sin(2) < 0$

Luego $\exists t_0 \in [0,1]$ $h(t_0) = 0$ $\Rightarrow$ $y(t_0) = g(x(t_0))$.

Si $x(t_0) \leq \frac{1}{2k\pi}$ $y(t_0) = 0 \Rightarrow$ $\gamma(t_0) \in B_r((0,0))$, imposible.

Así $x(t_0) > \frac{1}{2k\pi}$ $\Rightarrow$ $y(t_0) = \sin(\frac{1}{x(t_0)})$. Luego $\gamma(t_0) \in C$, imposible.

P3) b)

Se define $X = [0,1]^{[0,1]}$

i) $D = \{ f \in X \mid f : [0,1] \to [0,1] \text{ es continua} \}$ es denso en X.

Sea $U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$ cilindro abierto, $U_x \subset [0,1]$ abierto $\forall x \in [0,1]$.

$I = \{ x \in [0,1] \mid U_x \neq [0,1] \}$ es finito y lo podemos escribir

como $I = \{ x_1, \dots, x_n \}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Sean $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$

Sea $y_k \in U_{x_k}$ para $0 \leq k \leq n+1$.

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, lineal afín en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$

con $1 \leq k \leq n+1$, tal que $f(x_k) = y_k$. Entonces $f \in D \cap U$.

Esto muestra que D es denso en X.

Para ver que X es separable consideremos una variante de D. Definamos

$$D_n = \{ f : [0,1] \to [0,1] \mid \exists\, x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1 \text{ tal que } x_k \in \mathbb{Q}$$
$$f(x_k) \in \mathbb{Q},\ f \text{ es lineal afín en } [x_{k-1}, x_k]\ 1 \leq k \leq n \}.$$

D_n es numerable.

Sea $D_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ y veamos que D_∞ es denso en X. Sea

$U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$ cilindro abierto de X, $I = \{ x \in [0,1] \mid U_x \neq [0,1] \}$.

Construyamos una función $f \in D_\infty \cap U$ del siguiente modo.

Escribimos $I = \{x \in [0,1] \mid U_x \neq [0,1]\} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Para $2 \leq j \leq n$ sean $u_j, v_j \in \mathbb{Q}$ tales que $x_{j-1} < u_j < v_j < x_j$.

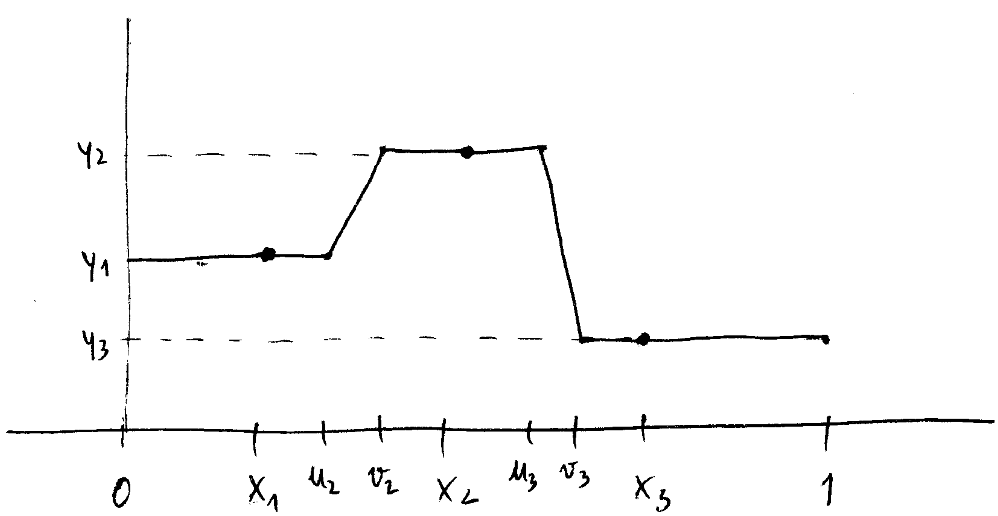
Sea $y_j \in \mathbb{Q} \cap U_{x_j}$, $1 \leq j \leq n$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que

$$f \text{ es lineal (afín) en } \begin{cases} [x_{j-1}, u_j],\ [u_j, v_j],\ [v_j, x_j] & 2 \leq j \leq n \\ [0, x_1] \text{ y } [x_n, 1] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= y_{j-1} \\ f(u_j) &= y_{j-1} \\ f(v_j) &= y_j \\ f(x_j) &= y_j \end{aligned}\right\} \quad 2 \leq j \leq n \qquad f(0) = y_1$$

$f(1) = y_n$

Entonces $f \in U \cap D_\infty$.



P3) b) ii)

$Y = \{ f \in X \mid \exists x_0 \in [0,1]$ con $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1], x \neq x_0 \}$.

Para ver que Y es discreto basta con verificar que $\forall f \in Y$ $\{f\}$ es abierto en la topología traza.

Pero $\{f\} = Y \cap U$ donde

U es el cilindro $\prod_{x \in [0,1]} U_x$, $U_x = [0,1] \ \forall x \neq x_0$
$U_{x_0} = (\frac{1}{2}, 1]$

y x_0 es el punto donde $f(x_0) = 1$.

Si Y fuera separable, $\exists Y_0 \subset Y$ denso numerable.

Pero $\{f\}$ es abto $\forall f \in Y \Rightarrow f \in Y_0 \quad \forall f \in Y$

$\Rightarrow Y = Y_0$.

Y no es numerable.

iii) Sea $g \in \overline{Y} \setminus Y$. Veamos que $g(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$. (la función nula).

Primero notamos que si $g \in \overline{Y}$, entonces $\forall x \in [0,1]$ $g(x) \in \{0,1\}$.

En efecto, si $g(x_0) \in (0,1)$ para algún $x_0 \in [0,1]$ elegimos

$U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$ donde $U_x = [0,1] \quad \forall x \neq x_0$

$U_{x_0} = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ tal que $y_0 - \varepsilon > 0$, $y_0 + \varepsilon < 1$.
e $y_0 = g(x_0) \in (0,1)$.

Entonces como $Y \cap U \neq \emptyset$ existe $h \in Y$, con $h(x_0) \in U_{x_0}$.

Esto implica $h(x_0) \notin \{0,1\}$ lo que no puede ser.

Veremos ahora que si $g \in \overline{Y}$ entonces g no puede tomar el valor 1 en más de dos puntos. Supongamos que sí, es decir $\exists x_0, x_1 \in [0,1]$ $x_0 \neq x_1$ con

$$g(x_0) = 1, \; g(x_1) = 1.$$

Sea $U = \prod_{x\in[0,1]} U_x$ $\quad U_x = [0,1] \quad \forall x \neq x_0, x \neq x_1$

$$U_{x_0} = (1/2, 1]$$
$$U_{x_1} = (1/2, 1].$$

Entonces U es vecindad de g. $U \cap Y \neq \phi \Rightarrow \exists h \in U \cap Y$.

Pero $h \in U \cap Y \Rightarrow h(x_0) = h(x_1) = 1$

(ya que $h=0$ o $h=1$ en cada punto, $h(x_0) \in (1/2, 1]$
$h(x_1) \in (1/2, 1]$).

Esto contradice la definición de Y (los elementos de Y valen 1 en 1 solo punto).

Luego $g \in \overline{Y} \Rightarrow g \in Y$ o $g(x) = 0 \;\forall x \in [0,1]$.
Notemos que la función nula, $0 \in \overline{Y}$, ya que para $U = \prod_{x\in[0,1]} U_x$ cilindro abierto que contiene al cero, eligiendo $x_0 \in [0,1]$ tal que $U_{x_0} = [0,1]$, vemos que $U \cap Y = \phi$, ya que la función $f \in Y$ que vale 1 en x_0 está en U.
Luego $\overline{Y} = Y \cup \{g\}$ con $g(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Sea V vecindad de 0. Entonces V contiene un cilindro abierto $U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$ $\quad U_x = [0,1]$ salvo un número finito de x's.

$U_x \neq [0,1] \iff x \in J$, $J \subset [0,1]$ finito.

Todo $f \in Y$ con $f(x_0) = 1$, $x_0 \notin J$ satisface $f \in U$ ya que para $x \in J$ $f(x) = 0 \in U_x$.

Es decir, los $f \in Y$ con $f \notin U$ forman un conjunto finito.