Control recuperativo – Análisis

Preg 1

(X,d) espacio métrico , $d \leq 1$, separable

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X

$f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ $\qquad f(x) = (d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$

f es continua Definamos

$p_m : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ la proyección sobre la coordenada m-ésima

$p_m((y_n)_n) = y_m$.

f es continua $\Leftrightarrow$ $p_m \circ f : X \to [0,1]$ es continua $\forall m$

Pero $p_m \circ f(x) = d(x, a_m)$ y se sabe que es continua

$\left(\quad |d(x, a_m) - d(x', a_m)| \leq d(x, x') \right)$.

f es inyectiva

Supongamos $f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall n \quad d(x, a_n) = d(x', a_n)$

Como $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso existe n_k $\quad d(x, a_{n_k}) \to 0 \Leftrightarrow a_{n_k} \to x$

$\Rightarrow \quad d(x', a_{n_k}) = d(x, a_{n_k}) \to 0$

Pero $d(x', a_{n_k}) \to d(x', x)$. Luego $d(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'$!

$f^{-1} : f(X) \to X$ es continua

Suponemos que x_k es una sucesión en X tal que $f(x_k) \to f(x)$ (X y $[0,1]^{\mathbb{N}}$ son métricos, por lo que podemos utilizar sucesiones).

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad d(x_k, a_n) \to d(x, a_n)$, $k \to \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos n tal que $d(x, a_n) \leq \varepsilon$.

Entonces

$$\begin{aligned} d(x, x_k) &\leq d(x, a_n) + d(a_n, x_k) \\ &= 2d(x, a_n) + d(a_n, x_k) - d(a_n, x) \\ &\leq 2\varepsilon + d(a_n, x_k) - d(a_n, x) \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \to \infty} d(a_n, x_k) - d(a_n, x) = 0$, $\exists k_0$ $\forall k \geq k_0$

$$d(a_n, x_k) - d(a_n, x) \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0 \quad d(x, x_k) \leq 3\varepsilon.$

Preg 2

(X,d) es métrico compacto

a) X es conexo

b) $\forall x,y$ $\forall \varepsilon>0$ existe una cadena de paso ε de x a y

$\Leftrightarrow$ $\exists x_0, \dots, x_n \in X$, $x_0 = x$, $x_n = y$ $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ $0 \leq i \leq n-1$.

a) $\Rightarrow$ b)

Fijamos $x \in X$, $\varepsilon>0$ y definimos $A = \{ y \in X \mid \exists$ cadena de paso ε de x a $y \}$.

$A \neq \emptyset$ ya que $x \in A$

A es abierto Supongamos $y_0 \in A$

Entonces $B_\varepsilon(y_0) \subset A$ ya que si $x_0, \dots, x_n$ es una cadena de paso ε de x a y_0 $x_0, \dots, x_n = y_0, y$ es una cadena de paso ε de x a y.

A es cerrado Supongamos $y_0 \in \overline{A}$. Entonces $B_\varepsilon(y_0) \cap A \neq \emptyset$.

Sea $y_1 \in B_\varepsilon(y_0) \cap A$ $x, \dots, x_n = y_1$ una cadena de paso ε de x a y_1. Entonces $x, \dots, x_n, y_0$ es una cadena de paso ε de x a y_0.

Como X es conexo $A = X$.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que X no es conexo. Entonces $\exists\ U, V$ cerrados disjuntos no vacíos, $X = U \cup V$.

Como X es compacto, U, V son compactos.

$$\Rightarrow \inf_{x \in U,\ y \in V} d(x,y) > 0$$

(porque $U \times V$ es compacto, d es continua en $U \times V$ y $d > 0$ en $U \times V$).

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{x \in U, y \in V} d(x,y)$, $x \in U$, $y \in V$. Entonces no puede haber una cadena de paso ε de x a y. En efecto, supongamos que sí existe, $x_0 = x$, $x_n = y$ $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ $0 \leq i \leq n-1$. Sea $j \geq 1$ el primer índice tal que $x_j \in V$. Así $x_{j-1} \in U \Rightarrow \varepsilon \leq d(x_{j-1}, x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, imposible.