Análisis P1 C3 2005.

Sea $k:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Se define

$$Tf(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \qquad f\in C([a,b],\mathbb{R})$$

$C([a,b],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$

a) Muestre que $T: C([a,b],\mathbb{R})\longrightarrow C([a,b],\mathbb{R})$ está bien definido y que $\{f\in C([a,b],\mathbb{R}),\ Tf=f\}$ es cerrado

b) $\{Tf : \|f\|\leq n\}$ es rel. compacto para todo $n\geq 0$

c) $\{f\in C[a,b],\mathbb{R} \mid Tf=f\}$ es un e.v. dim finita

a). Debemos probar que $Tf(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$ es continua

Sea $\varepsilon>0$, $x_0\in[a,b)$

$$|Tf(x)-Tf(x_0)| = \left|\int_a^b k(x,y)f(y) - \int_a^b k(x_0,y)f(y)\right|$$

$$\leq \int_a^b |k(x,y)-k(x_0,y)|\,|f(y)|\,dy$$

k es unif continua $\Rightarrow \exists\, \delta=\delta(\tilde{\varepsilon})$ tq $|(x,y)-(x_0,y)| = |x-x_0|<\delta$

$$\Rightarrow |k(x,y)-k(x_0,y)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}(b-a)$$

$$\Rightarrow |Tf(x)-Tf(x_0)| \leq \tilde{\varepsilon}\int_a^b |f(y)|\,dy \leq \tilde{\varepsilon}\,\|f\|_\infty(b-a)=\varepsilon.$$

• Probemos que $\mathcal{C}=\{f\in C([a,b],\mathbb{R});\ Tf=f\}$ es cerrado

Basta ver que T es continua.

$$|Tf(x)-Tg(x)| = \left|\int_a^b k(x,y)(f(y)-g(y))\,dy\right| \leq \int_a^b |k(x,y)|\,|f(y)-g(y)|\,dy$$

$$\leq K(b-a)\|f-g\|_\infty \quad \text{con } K=\sup_{(x,y)\in[a,b]^2}|k(x,y)|$$

Ahora, dado $g_n\longrightarrow g$ (con $Tg_n=g_n$)

$$\underset{T\text{ continua}}{\Longrightarrow}\quad Tg_n\longrightarrow Tg$$

g, dada la unicidad del límite (unicidad)

$$\Rightarrow Tg=g$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \text{ es cerrado.}$$

b) Debemos ver que $A = \{ Tf \mid \|f\|_\infty \leq M \}$ es rel. compacto.

si $M = 0$ es trivial así que suponemos que $M > 0$.

→ A es equicontinuo: sea $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$.

Dado ~~k~~ ~~es~~ que k es unif continua, $\exists\, \delta(\tilde{\varepsilon}) > 0$ tq

si $|(x,y)-(x_0,y)| = |x-x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |k(x,y)-k(x_0,y)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$$

y $$|Tf(x)-Tf(x_0)| \leq \int_a^b |k(x,y)-k(x_0,y)|\,|f(y)|\,dy$$

$$\leq \tilde{\varepsilon}\, \|f\|_\infty (b-a) \leq \tilde{\varepsilon} M (b-a) = \varepsilon.$$

luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, V \in V_{x_0}$, $V = (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\forall x \in V \quad |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall g \in A \Rightarrow$ A es equicontinuo.

→ $B = \{ Tf(x), \|f\|_\infty \leq M \}$ es rel. compacto en $\mathbb{R}$. $\forall x$.

basta ver que B es acotado en $\mathbb{R}$.

$$|Tf(x)| = \left|\int_a^b k(x,y) f(y)\,dy\right| \leq K \|f\|_\infty (b-a) \leq \underbrace{K M (b-a)}_{\text{acotado}}$$

$$K = \sup_{x \in [a,b]^2} |k(x,y)|$$

luego, A es rel. compacto en $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

c) Claramente $V = \{ f \in C([a,b],\mathbb{R}),\ Tf = f \}$ es un s.e.v. de $C([a,b],\mathbb{R})$ cerrado por a) y luego Normado.

sea $f_0 \in V$ y sea $A_{f_0} = \{ Tf \mid \|f\|_\infty \leq M \}$

A_{f_0} es rel. compacto $\Rightarrow U = \overline{A_{f_0}} \cap V$ es compacto en V

y $$B_{f_0} = \underbrace{\{ f \mid \|f\|_\infty < M \} \cap V}_{\text{abierto en } V} \subseteq \underset{\text{compacto}}{U}$$

$f_0 \in B_{f_0} \subseteq U \Rightarrow V$ es loc. compacto y Hausdorff

$\Rightarrow \dim V < \infty$ ☒