**MA38B – Análisis I**

**Tarea 2**

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

**Pregunta 1.** En un espacio topológico un conjunto $A$ se dice $G_\delta$ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos. $B$ se dice $F_\sigma$ si es la unión numerable de conjuntos cerrados.

1. Pruebe que $\mathbb{I}$ (el conjunto de los número irracionales) es $G_\delta$ en $\mathbb{R}$.
2. Utilice el teorema de Baire para probar que $\mathbb{Q}$ no es $G_\delta$.

   Ind.: si lo fuera $\mathbb{Q} = \cap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ con $W_n$ abierto. Todo $W_n$ es además denso. Considere ahora la colección de abiertos densos $\{W_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{q\} | q \in \mathbb{Q}\}$.
3. Sea $X$ un espacio topológico, $(Y, d)$ un espacio métrico y $f : X \to Y$. Pruebe que el conjunto de puntos donde $f$ es continua es $G_\delta$.
4. Concluya que no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua exactamente en los puntos de $\mathbb{Q}$.

   Por el contrario, construya una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua solamente en los irracionales.
5. Considere $C([0,1], \mathbb{R})$ con la métrica de la convergencia uniforme y para $m \geq 1$ entero definamos

$$F_m = \left\{ f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{m}] \text{ tal que } \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leq m \, \forall h \in (0, \frac{1}{m}) \right\}.$$

   Muestre que $F_m$ es cerrado de interior vacío. Deduzca que el conjunto de las funciones en $C([0,1], \mathbb{R})$ que no son diferenciables en ningún punto de $(0,1)$ es denso en $C([0,1], \mathbb{R})$.
6. Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo e $Y \subset X$ un conjunto $G_\delta$. Muestre que $Y$ (con la métrica restringida) es un espacio de Baire, es decir toda unión numerable de abiertos densos de $Y$ es densa en $Y$. Para esto escriba $Y = \cap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ con $W_n$ abierto. Supongamos que $U_n$ son abiertos de densos de $Y$. Dada $B_0$ una bola abierta de $Y$ construya inductivamente bolas abiertas $B_n$ de $Y$ tales que

$$\begin{aligned} \overline{B}_{n+1} &\subset B_n \\ \overline{B}^Y_{n+1} &\subset B_n \cap U_n \\ \overline{B}_n &\subset W_n \\ diam(B_n) &\to 0. \end{aligned}$$

   (Si $A \subset X$ su adherencia en $X$ es $\overline{A}$, si $A \subset Y$ su adherencia en $Y$ es$\overline{A}^Y$.)

**Pregunta 2.** Un espacio topológico se dice localmente compacto si para todo $x \in X$ existe $V \subset X$ vecindad abierta de $x$ con $\overline{V}$ compacto.

Un espacio topológico $X$ se dice $\sigma-$compacto si es localmente compacto y existe una familia numerable de compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Sea $X$ localmente compacto y $K \subset X$ compacto. Pruebe que existe $V$ abierto con $K \subset V$ y $\overline{V}$ compacto.

2. Pruebe que $X$ es $\sigma-$compacto si y sólo si existe una familia de abiertos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

   *a)* $X = \cup_{n\in N} V_n$

   *b)* $\overline{V}_n$ es compacto

   *c)* $V_n \subset \overline{V}_n \subset V_{n+1}$

   Sean $X$ un espacio $\sigma-$compacto e $(Y,d)$ un espacio métrico, con $d$ acotada. En $C(X,Y)$ se define la topología de la convergencia uniforme en compactos como la generada por la subbase de abiertos

$$V(f,K,\epsilon) = \{g \in C(X,Y) \mid \sup_{x\in K} d(f(x),g(x)) < \epsilon\},$$

   con $f \in C(X,Y)$, $K \subset X$ compacto y $\epsilon > 0$.

3. Muestre que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es metrizable.

   Ind.: basta trabajar con los compacto $\overline{V}_n$ de la parte anterior. Luego la demostración es similar a la del resultado: el producto numerable de espacios metrizables es metrizable.

4. Sean $f_n, f \in C(X,Y)$. Pruebe que $f_n \to f$ con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos si y sólo si para todo $K \subset X$ compacto $f_n \to f$ uniformemente en $K$.

5. Demuestre que si $H \subset C(X,Y)$ es relativamente compacto entonces para todo $K \subset X$ compacto $\{f|_K \mid f \in H\}$ es relativamente compacto en $C(K,Y)$, donde en este espacio consideramos la métrica de la convergencia uniforme.

6. Sea $(f_n)$ una sucesión en $C(X,Y)$ tal que para todo $K \subset X$ compacto exista $g_K \in C(K,Y)$ tal que $f_n \to g_K$ uniformemente en $K$. Pruebe que existe $g \in C(X,Y)$ tal que $f_n \to g$ uniformemente en compactos de $X$.

7. Concluya que $H \subset C(X,Y)$ es relativamente compacto si y sólo si para todo $K \subset X$ compacto $\{f|_K \mid f \in H\}$ es relativamente compacto en $C(K,Y)$.

8. Demuestre que $H \subset C(X,Y)$ es relativamente compacto si y sólo si

   *a)* para todo $K \subset X$ compacto $\{f|_K \mid f \in H\}$ es equicontinua

   *b)* $\forall x \in X$ , $\{f(x) \mid f \in H\}$ es relativamente compacto en $Y$.

**Pregunta 3.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e $y_0 \in \mathbb{R}$. El teorema de Peano afirma que existe $\delta > 0$ y una función $y : [0,\delta] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $(0,\delta)$ tal que

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) & 0 < x < \delta, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Definamos

$$M = \max_{[0,1]\times[y_0-1,y_0+1]} |f| \quad \delta = \min(1, \frac{1}{M}).$$

Construyamos una sucesión de funciones continuas en $[0,\delta]$ mediante:

$$\begin{aligned} y_n(0) &= y_0 \\ y_n(\delta\frac{k+1}{n}) &= y_n(\delta\frac{k}{n}) + \frac{\delta}{n} f(\delta\frac{k}{n}, y_n(\delta\frac{k}{n})) \quad 0 \le k \le n-1 \\ & y_n \text{ es lineal afín en los intervalos } [\delta\frac{k}{n}, \delta\frac{k+1}{n}] \quad 0 \le k \le n-1. \end{aligned}$$

1. Pruebe que $y_n$ es Lipschitz de constante $M$ y $|y_n(x) - y_0| \le 1$ para todo $x \in [0,\delta]$.
2. Demuestre que $y_n$ es relativamente compacta en $C([0,\delta],\mathbb{R})$.
3. Sea $y_{n_j}$ una subsucesión de $y_n$ convergente uniformemente en $[0,\delta]$ a una función $y \in C([0,\delta],\mathbb{R})$.

   Pruebe que $f(t, y_{n_j}(t)) \to f(t, y(t))$ uniformemente en $[0,\delta]$ y concluya que

   $$\int_0^x f(t, y_{n_j}(t))\, dt \to \int_0^x f(t, y(t))\, dt \quad \forall x \in [0,\delta].$$

4. Definamos

   $$z_n(x) = y_n(\delta\frac{k}{n}) \quad \text{si } x \in [\delta\frac{k}{n}, \delta\frac{k+1}{n}).$$

   Muestre que $z_{n_j}$ converge uniformemente a $y$ en $[0,\delta]$ y utilice este hecho para probar

   $$\int_0^x f(t, z_{n_j}(t))\, dt \to \int_0^x f(t, y(t))\, dt \quad \forall x \in [0,\delta].$$

5. Concluya que

   $$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))\, dt \quad \forall x \in [0,\delta]$$

   y que, por lo tanto, $y$ es solución de (1).