MA38B – Análisis I

Tarea 1

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

Pregunta 1. En lo que sigue p denota un número primo. Para $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ se define

$$|x|_p = p^{-s}$$

donde $s \in \mathbb{Z}$ es el entero tal que x se puede escribir de la forma

$$x = p^s \frac{a}{b},$$

donde a, b son enteros primos relativos entre sí que no tienen a p como factor. También se define $|0|_p = 0$.

- Pruebe la fórmula

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p$$

- y la desigualdad

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

- Verifique que $d_p(x, y) = |x - y|_p$ es una métrica en $\mathbb{Q}$ que satisface además

$$d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(z, y)).$$

  Una métrica con esta propiedad se dice ultramétrica.

Definimos $\mathbb{R}_p$ como la completación de $\mathbb{Q}$ con la métrica d_p.

- Pruebe que $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to Q$ (suma) y $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to Q$ (producto) admiten extensiones continuas únicas a $\mathbb{R}_p$ y justifique brevemente que con estas operaciones extendidas $(\mathbb{R}_p, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- Demuestre que $\overline{\mathbb{N}}$ es compacto y para la sucesión $x_n = n$ exhiba una subsucesión convergente.
- Dada una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{R}_p$ diremos que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge si la sucesión de sumas parciales $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ es convergente.

  Pruebe que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ si y sólo si $a_n \to 0$.

  Ind.: justifique que la desigualdad $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ sigue siendo válida en $\mathbb{R}_p$.
- Pruebe que en $\mathbb{R}_p$ las bolas abiertas $B_r(x)$ son cerradas.
- Demuestre que $\mathbb{R}_p$ es totalmente disconexo, es decir, sus componente conexas se reducen a puntos.

Pregunta 2. Sea ℓ^∞ el conjunto de las sucesiones (x_n) reales acotadas dotado de la métrica $d_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

- Demuestre que (ℓ^∞, d_∞) es completo.
- Sea ℓ^∞_f el conjunto de las sucesiones (x_n) de ℓ^∞ tales que $x_n \neq 0$ para un número finito de índices.

  Pruebe que $(\ell^\infty_f, d_\infty)$ no es completo
- Demuestre que ℓ^∞_f no es denso en ℓ^∞.

En ℓ^∞ la topología de la convergencia puntual (es decir la que hereda del producto $\mathbb{R}^\mathbb{N}$) es metrizable. Denotemos por d^* alguna de estas métricas.

Escribamos τ_∞ la topología en ℓ^∞ definida por d_∞ y τ^* la topología de la convergencia puntual.

- Muestre que τ^∞ es estrictamente más fina que τ^*.

Sean $K_m = \{x \in \ell^\infty \,|\, d_\infty(0,x) \leq m\}$.

- Demuestre que K_m noes τ^∞ compacto.
- Pruebe que K_m es τ^* compacto.
- Muestre que (ℓ^∞, d^*) no es completo.

  Ind.: ¿qué puede decir del interior de K_m para la topología τ^*?
- Sea ℓ_c el conjunto de las sucesiones reales convergentes. Pruebe que ℓ_c es un subconjunto cerrado de (ℓ^∞, d^∞).

Sea ℓ^1 el conjunto de las sucesiones (x_n) reales para las cuales $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$ con la distancia

$$d_1(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|, \qquad \text{donde } x = (x_n),\ y = (y_n).$$

- Pruebe que ℓ_f es denso en (ℓ^1, d_1).
- Demuestre que la completación de ℓ_f con d_1 es ℓ^1.

Pregunta 3. En un espacio topológico un conjunto A se dice G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos. B se dice F_σ si es la unión numerable de conjuntos cerrados.

- Pruebe que $\mathbb{I}$ (el conjunto de los número irracionales) es G_δ en $\mathbb{R}$.
- Utilice el teorema de Baire para probar que $\mathbb{Q}$ no es G_δ.

  Ind.: si lo fuera $\mathbb{Q} = \cap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ con W_n abierto. Todo W_n es además denso. Considere ahora la colección de abiertos densos $\{W_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{q\} | q \in \mathbb{Q}\}$.
- Sea X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico y $f : X \to Y$. Pruebe que el conjunto de puntos donde f es discontinua es G_δ.

- Concluya que no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua exactamente en los puntos de $\mathbb{Q}$.

  Por el contrario, construya una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua solamente en los irracionales.

- Considere $C([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica de la convergencia uniforme y para $m \geq 1$ entero definamos

  $$F_m = \left\{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) | \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{m}] \text{ tal que } \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leq m \, \forall h \in (0, \frac{1}{m}) \right\}.$$

  Muestre que F_m es cerrado de interior vacío. Deduzca que el conjunto de las funciones en $C([0,1],\mathbb{R})$ que no son diferenciables en ningún punto de $(0,1)$ es denso en $C([0,1],\mathbb{R})$.

- Sea (X,d) un espacio métrico completo e $Y \subset X$ un conjunto G_δ. Muestre que Y (con la métrica restringida) es un espacio de Baire, es decir toda unión numerable de abiertos densos de Y es densa en Y. Para esto escriba $Y = \cap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ con W_n abierto. Supongamos que U_n son abiertos de densos de Y. Dada B_0 una bola abierta de Y construya inductivamente bolas abiertas B_n de Y tales que

  $$\begin{aligned} \overline{B}_{n+1} &\subset B_n \\ \overline{B}^Y_{n+1} &\subset B_n \cap U_n \\ \overline{B}_n &\subset W_n \\ diam(B_n) &\to 0. \end{aligned}$$

  (Si $A \subset X$ su adherencia en X es $\overline{A}$, si $A \subset Y$ su adherencia en Y es$\overline{A}^Y$.)